MATH

مراجعة مركزة

محتويات مراجعة الرياضيات للصف السادس علمي

الفصل الاول الاعداد المركبة

مثـــال:

إذا كانت $c_1 = 1 + i \ , \ c_2 = 3 - 2i$ فتحقق من $\overline{(c_1/c_2)}$

جـ:

$$LHS: \overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \overline{\left(\frac{1+i}{3-2i}\right)} = \overline{\left(\frac{1+i}{3-2i} \times \frac{3+2i}{3+2i}\right)}$$
$$= \overline{\left(\frac{(3-2)+(2+3)i}{9+4}\right)} = \overline{\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i} = \frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$$
$$RHS: \left(\frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}\right) = \left(\frac{1-i}{3+2i}\right) = \left(\frac{1-i}{3+2i} \times \frac{3-2i}{3-2i}\right)$$
$$= \left(\frac{(3-3i-2i-2)}{13}\right) = \frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$$
$$\because LHS = RHS \quad \Rightarrow \quad \therefore \overline{(c_1/c_2)} = \overline{c_1}/\overline{c_2}$$

$$2)\ LHS\ \overline{c_1 \,.\, c_2} = \overline{(1+i)(3-2i)}$$
$$= \overline{(3+2)+(3-2)i} = \overline{5+i} = 5-i$$
$$RHS\ \overline{c_1} \,.\, \overline{c_2} = (1-i)(3+2i)$$
$$= (3+2)+(-3+2)i = 5-i$$
$$\because LHS = RHS$$
$$\therefore \overline{c_1 . c_2} = \overline{c_1} . \overline{c_2}$$

مثـــال:

إذا كان $\frac{3-2i}{i}$ ، $\frac{x-yi}{1+5i}$ مترافقان فجد قيمة كل من x ،y التي تنتمي الى R

جـ:

بما أن العددان $\frac{3-2i}{i}$ ، $\frac{x-yi}{1+5i}$ مترافقان فأن:

$$\therefore \overline{\left(\frac{x-yi}{1+5i}\right)} = \frac{3-2i}{i} \Rightarrow \frac{x+yi}{1-5i} = \frac{3-2i}{i}$$
$$\frac{3-2i}{i} = \frac{x+yi}{1-5i} \quad \Rightarrow \quad (i)(x+yi) = (3-2i)(1-5i)$$
$$\Rightarrow xi + yi^2 = (3-2i-15i-10) \Rightarrow -y + xi = -7 - 17i$$
$$-y = -7 \quad \Rightarrow \quad \therefore y = 7 \quad , \quad x = -17$$

ملاحظات لأيجاد قيم x, y

1. التخلص من الكسور بالضرب بالمرافق أو بتوحيد المقامات أو الوسطين يساوي الطرفين
2. الأسس والأقواس ثم أجراء العمليات الرياضية الضرب والجمع و.......
3. الفصل عزل الأجزاء الحقيقية عن الأجزاء التخيلية لكل طرف
4. نحصل على تساوي العددين المركبين من خاصية التساوي نحصل على معادلتين
   - المعادلة الأولى من الأجزاء الحقيقية - المعادلة الثانية من الأجزاء التخيلية
5. وبحل المعادلتين بالتعويض أو الحذف نحصل على قيم كل من x, y

ملاحظـــة

1. المقدار $x + yi$ يعامل كمجهول واحد .
2. اذا وجد المقدار $x + yi$ في المقام أو في كسرا واحدا فيفضل ان يترك هذا الكسر وحده في احد الأطراف ثم نجعل الحدود المتبقية في الطرف الآخر ثم نقوم بتبسيطهاثم نكمل الحل.

مثـــال:

جد قيمة كل من x, y الحقيقيتين اذا علمت ان $(2x+i)(x+2i) = \frac{y^2+4yi+5}{y-i}$

جـ:

$$(2x^2-2)+(4x+x)i = \frac{y^2+4yi-5i^2}{y-i}$$

لاحظ قمنا بأضافة i^2 مع قلب أشارة الحد لكي تكون الحدودية قابلة للتحليل بالتجربة. لأن $(i^2 = -1$

$$(2x^2-2)+(5x)i = \frac{(y+5i)(y-i)}{(y-i)} \Rightarrow (2x^2-2)+(5x)i = (y+5i)$$
$$5x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$
$$2x^2 - 2 = y \ \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

بتعويض معادلة الأولى في معادلة الثانية

$$2(1)^2 - 2 = y \quad \Rightarrow \quad y = 2-2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 0 \ , \quad x = 1}$$

مثال:

جد قيم $x, y \in R$ إذا علمت ان $x(x-i)+y(y-i)+i=13$

ج:

$$x(x-i)+y(y-i)+i=13 \quad \Rightarrow \quad x^2-xi+y^2-yi+i=13$$
$$x^2+y^2-(x+y)i=13-i \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2=13 \ \dots(1)$$
$$-(x+y)=-1 \quad \Rightarrow \quad -x-y=-1 \Rightarrow \quad y=1-x \ \dots(2)$$

نعوض (2) في (1) $x^2+(1-x)^2=13 \quad \Rightarrow \quad x^2+1-2x+x^2=13$

$$2x^2-2x-12=0\ ]\ \div 2 \quad \Rightarrow \quad x^2-x-6=0$$
$$(x-3)(x+2)=0 \quad \Rightarrow \quad x=3 \ \ or \ \ x=-2$$

نعوض قيم x في (2) $\boxed{x=-2 \Rightarrow y=3}$ $\boxed{x=3 \Rightarrow y=-2}$

مثال:

اذا كان $\frac{x^3-8i}{x+2i}+\frac{x^2+4y^2}{x-2yi}=-3x-3yi-8$ جد x, y؟

ج:

$$\frac{x^3+8i^3}{x+2i}+\frac{x^2-4y^2i^2}{x-2yi}=(-3x-8)-3yi$$
$$\frac{(x+2i)(x^2-2xi-4)}{(x+2i)}+\frac{(x-2yi)(x+2yi)}{(x-2yi)}=(-3x-8)-3yi$$
$$(x^2-2xi-4)+(x+2yi)=(-3x-8)-3yi$$
$$x^2+x-4=-3x-8 \quad \Rightarrow \quad x^2+4x+4=0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)^2=0$$
$$x+2=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=-2} \quad \Rightarrow \quad -2x+2y=-3y \quad \Rightarrow \quad -2x=-5y$$
$$4=-5y \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=-\frac{4}{5}}$$

مثال:

2) جدقيمتي كل من x , y الحقيقيتين اللتين تحققا المعادلات الأتية:-

ج:

$$c)\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+(x+yi)=(1+2i)^2$$
$$\left(\frac{1-i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}\right)+(x+yi)=(1-4)+4i$$
$$\Rightarrow \frac{(1-1)-2i}{2}+(x+yi)=-3+4i$$
$$-i+(x+yi)=-3+4i \quad \Rightarrow \quad (x+yi)=-3+4i+i$$
$$x+yi=-3+5i \quad \Rightarrow \quad \therefore x=-3 \quad ; \quad y=5$$

$$d)\ \frac{2-i}{1+i}x+\frac{3-i}{2+i}y=\frac{1}{i}$$
$$\frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}x+\frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}y=\frac{1}{i}\times\frac{1}{-i}$$
$$\frac{(2-1)+(-2-1)i}{1+1}x+\frac{(6-1)+(-3-2)i}{4+1}y=\frac{-i}{1}$$
$$\frac{1-3i}{2}x+\frac{5-5i}{5}y=0-i \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}xi\right)+(y-yi)=0-i$$
$$\left(\frac{1}{2}x+y\right)-\left(\frac{3}{2}x+y\right)i=0-i \Rightarrow \therefore \frac{1}{2}x+y=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2y \ \dots..(1)$$
$$\therefore -\left(\frac{3}{2}x+y\right)=-1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}x+y=1 \ \dots\dots(2)$$

بتعويض المعادلة الأولى في الثانية

$$\left(\frac{3}{2}\right)(-2y)+y=1 \quad \Rightarrow \quad -3y+y=1 \quad \Rightarrow -2y=1 \quad \Rightarrow \quad \therefore y=\frac{-1}{2}$$

$\therefore x=-2\left(\frac{-1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=1}$ (بتعويض $y=-\frac{1}{2}$ في المعادلة الأولى ينتج:-

مثال:

3) أثبت أن :-

ج:

$$a)\ \frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{8}{25}i$$
$$LHS: \frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{1}{(4-1)-4i}-\frac{1}{(4-1)+4i}$$
$$=\frac{1}{3-4i}-\frac{1}{3+4i}=\frac{(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}-\frac{(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}$$
$$=\frac{3+4i}{9+16}-\frac{3-4i}{9+16}=\frac{(3-4i)+(-3+4i)}{25}=\frac{8}{25}i=RHS$$

$$b)\ \frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=-2$$
$$LHS: \frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=\frac{-2i}{(1+i)}+\frac{+2i}{(1-i)}=\frac{(-2i)(1-i)+(2i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{(-2i+2i^2)+(2i+2i^2)}{(1+1)}=\frac{4i^2}{2}=2i^2=-2=RHS \qquad ; \ i^2=-1$$

أختبـــــر نفسك في الأسئلة الوزاريـــــة

[2012 دور1]	ضع $(1+3i)^2+(3-2i)^2$ بالصيغة العادية للعدد المركب .	$[Ans: -3-6i]$
[1998]	أذا كان $\frac{9y^2+49}{3y+7i}=(2+xi)(-x+i)$ ما قيمة $x,y\in R$ التان تحققان المعادلة	$[Ans: x=\pm 3, y=\mp 3]$
[1999]	جد قيمة $x,y\in R$ أذا علمت أن $(3x+2yi)^2=\frac{200}{4+3i}$	$[Ans: x=\pm 2, y=\mp 1]$
[2000 دور1]	أذا كان $x=2+3i$, $y=3-i$ جد قيمة x^2+2y^2 .	$[Ans: 11]$
[2002 دور1]	ضع $(-2+i)(3+2i)$ بالصيغة العادية للعدد المركب ثم جد نظيره الضربي وبالصيغة العادية أيضاً	$[Ans: -8-i]$
[2003]	أذا كانت $x=3+2i$, $y=1-i$ أثبت أن $\overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y}$.	$[Ans: -1-6\sqrt{3}i]$
[2004 دور1]	جد الصيغة العادية للعدد $(2-\sqrt{3}i)^2+(1-\sqrt{3}i)^2$	
[2006]	جدقيمة $x,y\in R$ من المعادلة $(2x+i)(y+2i)=2+9i$	$\left[Ans: x=\frac{1}{4}, y=8 \text{ and } x=2, y=1\right]$
[2012 دور1]	إذا كان $\frac{5}{x+yi}$ ، $\frac{2+i}{3-i}$ مترافقان فجد قيمة x ،y الحقيقيتين	
[2012 دور2]	جد الصيغة العادية للعدد $(1+i)^5-(1-i)^5$	$[Ans: -8i]$
[2013 دور1]	جد ناتج : $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)$	$[Ans: 4]$
[2013 دور3]	جدقيمة $x,y\in R$ والتي تحققان $\frac{x^2+4}{x+2i}=\frac{y}{1+i}$	$[Ans: x=2 \quad , y=4]$
[2014 ت]	أذا كانت $c_1=7-4i$, $c_2=2-3i$ أثبت أن $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)}=\frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$	
[2015 ت]	جدقيمة $x,y\in R$ والتين تحققان المعادلة $\frac{1-i}{1+i}+(x+yi)=(1+i)^2$	
[2016 ت]	جد قيمة $x,y\in R$ والتين تحققان المعادلة $\frac{125}{11+2i}x+(1-i)^2y=11$	
[2015 دور3]	جد قيمة x,y الحقيقيتين إذا علمت أن $\frac{6}{x+yi}$, $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان	$[Ans: x=y=3]$
[2016 دور2]	جد قيمة $x,y\in R$ إذا علمت أن $\frac{121+9y^2}{11+3yi}=(x+2i)(x-i)$	
[3/2017/2016]	إذا كان $\frac{3-2i}{i}$, $\frac{x-yi}{1+5i}$ مترافقان جد قيمة x,y	$[Ans: x=-17, y=7]$
[2017 ح دور1]	أثبت أن : $\frac{1}{(1+2i)^2}+\frac{1}{(1-2i)^2}=\frac{-6}{25}$	
[2018ح دور1]	ضع العدد بالصيغة العادية للعدد المركب : $\frac{(1+i)^{15}}{128}$ ثم مثل العدد ومرافقه بشكل أرجاند	

الجذور التربيعية للعدد المركب

لأيجاد الجذر التربيعي لأي عدد مركب نتبع الخطوات الأتية:

1. نفرض أن الجذر التربيعي المعطى في السؤال وليكن $a+bi$ هو
2. نربع الطرفين فنحصل على معادلة خالية من الجذر
3. نفتح التربيع نحصل على تساوي عددين مركبين
4. نكون المعادلتين

بعد وضع العدد بصورة

$$\sqrt{a+bi}=(x+yi)$$

$$a+bi=(x+yi)^2$$

$$a+bi=(x^2-y^2)+2xyi$$

$$x^2-y^2=a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$2xy=b \quad \Rightarrow \quad y=\frac{b}{2x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

5. نعوض المعادلة الثانية في المعادلة الأولى نحصل على معادلة تحل بالتجربة ونكمل الحل لأيجاد قيم كل من x,y ثم نكتبهما على صورة $\mp(x+yi)$

مثـــال:

جد الجذور التربيعية للعدد $c = 8 + 6i$

جـ:

نفرض أن $x + yi = \sqrt{8 + 6i}$ وبتربيع الطرفين ينتج:

$$(x + yi)^2 = 8 + 6i$$
$$(x^2 - y^2) + 2xyi = 8 + 6i$$

من تساوي عددين مركبين

$$x^2 - y^2 = 8 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$2xy = 6 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وبتعويض المعادلة الثانية في المعادلة الأولى نحصل على:

$$x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 8 \Rightarrow \quad x^2 - \frac{9}{x^2} = 8$$

نضرب طرفي المعادلة في x^2 ينتج :-

$$x^4 - 9 = 8x^2$$
$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0$$
$$either \ (x^2 - 9) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \mp 3}$$

نعوض في معادلة الثانية

$$y = \frac{3}{\mp 3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \mp 1}$$
$$or \ (x^2 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -1$$

يهمل لأن الناتج لا ينتمي للأعداد الحقيقية

أي أن جذري العدد $c = 8 + 6i$ هما $(3 + i \ , \ -3 - i)$ ويمكن كتابتهما في الشكل $\mp(3 + i)$

مثـــال:

اذا كان $c + di = \frac{5-i}{1+i}$ جد الجذران التربيعيان للعدد $4c - 2di$ أو جد ناتج $\sqrt{4c - 2di}$

جـ:

$$c + di = \frac{5 - i}{1 + i} \quad \Rightarrow \quad c + di = \frac{5 - i}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i}$$
$$c + di = \frac{5 - 5i - i - 1}{2} \quad \Rightarrow \quad c + di = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i$$

$c + di = 2 - 3i$ بالمقارنة $\Rightarrow c = 2 \ , \ d = -3$

$$4c - 2di = 4(2) - 2(-3)i = 8 + 6i$$

نفرض أن $x + yi = \sqrt{8 + 6i}$ وبتربيع الطرفين ينتج: $(x + yi)^2 = 8 + 6i$ ثم نكمل الحل

حل المعادلات التربيعية في $\mathbb{C}$

مثـــال:

$b) \ z^2 - 3z + 3 + i = 0$

جـ:

$$z^2 - 3z + 3 + i = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1, \quad b = -3, \quad c = 3 + i$$
$$\because \ z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(3 + i)}}{2(1)}$$
$$z = \frac{3 \pm \sqrt{9 - (12 + 4i)}}{2} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{3 \pm \sqrt{-3 - 4i}}{2} \ \ldots\ldots (1)$$

الآن يجب أيجاد الجذرالتربيعي $\sqrt{-3 - 4i}$

نفرض أن $x + yi = \sqrt{-3 - 4i}$ وبتربيع الطرفين ينتج: $(x + yi)^2 = -3 - 4i$

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = -3 - 4i$$

من تساوي عددين مركبين

$$x^2 - y^2 = -3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$2xy = -4 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-2}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

و بتعويض المعادلة الثانية في المعادلة الأولى نحصل على:

$$x^2 - \left(\frac{-2}{x}\right)^2 = -3 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{4}{x^2} = -3$$

نضرب طرفي المعادلة في x^2 ينتج:-

$$x^4 - 4 = -3x^2$$
$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2 + 4)(x^2 - 1) = 0$$
$$either \ (x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \mp 1$$

نعوض في معادلة الثانية

$$y = \frac{-2}{\mp 1} \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2$$
$$or \ (x^2 + 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -4$$

يهمل لأن الناتج لا ينتمي للأعداد الحقيقية

أي أن جذري العدد $(-3 - 4i)$ هما $\mp(-1 + 2i)$ نعوض الجذور في المعادلة الأولى

$$z = \frac{3 \pm (1 - 2i)}{2} \quad \Rightarrow \quad either \quad z = \frac{3 + (1 - 2i)}{2} = \frac{(4 - 2i)}{2} = 2 - i$$
$$or \quad z = \frac{3 - (1 - 2i)}{2} = \frac{(2 + 2i)}{2} = 1 + i$$

مجموعة الحل هي $\{2 - i \ , 1 + i\}$ الجذران غير مترافقان.

ملاحظـــــــــــــــة

إذا طلب في السؤال تكوين معادلة تربيعية وعلم الجذران فنستخدم المعادلة الآتية:

$$x^2 - (\text{حاصل جمع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$$

مثـــال:

جد المعادلة التربيعية التي جذراها $(-2-i\,,-2+i)$

جـ:

مجموع الجذرين $= (-2-i) + (-2+i) = -4$

حاصل الضرب $= (-2-i)(-2+i) = 4+1 = 5$

$x^2 - (-4)x + (5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^2+4x+5=0}$ المعادلة التربيعية هي

مثـــال:

جد المعادلة التربيعية التي جذراها $\pm(2+2i)$

جـ:

مجموع الجذرين $= (2+2i) + (-2-2i) = 0$

حاصل الضرب $= (2+2i)(-2-2i) = (-4+4) + (-4-4)i = 0 - 8i = -8i$

$x^2 - (0)x + (-8i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^2 - 8i = 0}$ المعادلة التربيعية هي

ملاحظـــــــــــــــة

إذا أعطي في السؤال جذر واحد وذكر أن معاملات المعادلة حقيقية فأن الجذر الثاني هو مرافق الجذر الأول

مثـــال:

كون المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذريها $(3-4i)$

جـ:

بما أن معاملات المعادلة حقيقية وأحد جذريها $(3-4i)$ فيكون الجذر الثاني مرافق الجذر الأول

$\because\ L = 3-4i \quad \Rightarrow \quad M = 3+4i$

$\therefore\ L+M = (3-4i) + (3+4i) = 6$

$\therefore\ L \times M = (3-4i)(3+4i) = 9+16 = 25$

$\therefore\ \boxed{x^2 - 6x + 25 = 0}$ المعادلة التربيعية هي

ملاحظـــــــــــــــة

إذا أعطي في السؤال المعادلة التربيعية تحتوي على مجاهيل فعندها يمكن الحل $= \dfrac{\text{الحدود المطلقة}}{x^2\text{معامل}}$

مجموع الجذرين $= \dfrac{-x\text{معامل}}{x^2\text{معامل}}$; حاصل ضرب الجذرين

مثـــال:

اذا كان $(2-4i)$ هو احد جذري المعادلة $2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$ معاملاتها حقيقية فجد $b, c \in R$ ؟

جـ:

يكون الجذر الأول هو $L = 2-4i$ والجذر الثاني هو $M = 2+4i$ لأن المعاملات حقيقية

$$L+M = \frac{-(x\ \text{معاملات})}{x^2\text{معامل}} \quad \Rightarrow \quad (2-4i) + (2-4i) = \frac{-(-1-b)}{2}$$

$$4 = \frac{1+b}{2} \quad \Rightarrow (1+b) = 8 \quad \Rightarrow \quad b = 8-1 \quad \Rightarrow \quad b = 7$$

$$L \times M = \frac{\text{الحد المطلق}}{x^2\text{معامل}} \quad \Rightarrow \quad (2-4i)(2+4i) = \frac{c-6}{2} \quad \Rightarrow \quad 20 = \frac{c-6}{2}$$

$$c - 6 = 40 \quad \Rightarrow \quad c = 46$$

مثـــال:

اذا كان $(a+2i)$ هو احد جذري المعادلة $x^2 - bx + 13 = 0$ جد $a, b \in R$

جـ:

نلاحظ أن المعاملات حقيقية لأن المعادلة خالية من الـ(i) وأن كل من $a, b \in R$ يكون الجذر الأول هو $L = a+2i$ والجذر الثاني هو $M = a-2i$ لأن المعاملات حقيقية

$$L+M = \frac{-(x\ \text{معاملات})}{x^2\text{معامل}} \Rightarrow (a+2i) + (a-2i) = \frac{-(-b)}{1} \Rightarrow b = 2a \ldots\ldots(1)$$

$$L\times M=\frac{\text{الحد المطلق}}{x^2\text{معامل}}\Rightarrow (a+2i)(a-2i)=\frac{13}{1}\Rightarrow a^2+4=13$$

$$a^2=13-4\quad\Rightarrow\quad a^2=9\quad\Rightarrow\quad\therefore\ \boxed{a=\mp3}\ \Rightarrow b=2a\Rightarrow\therefore\ \boxed{b=\mp6}$$

واجـــــــــــــــــب:

اذا كان العدد •
اذا كان $3+2i$ هو احد جذري المعادلة $x^2-(4-2i)x+a=0$ فما قيمة $a\in C$ وما قيمة الجذر الاخر •
اذا كانت المعادلة التربيعية $x^2-2x+xi+k-\frac{8}{9}\ i=0$ جذرها الأول يساوي ضعف جذرها الثاني فما جذراها وما قيمة k ؟ •

مثــال:

5) إذا كان (3 •

جـ:

$\because$ الجذر الأول هو $(3+i)$ نفرض أن الجذر الثاني هو (L) والجذر الأول هو $(m=3+i)$

$$\text{مجموع الجذرين}=\frac{-\text{معاملات }x}{x^2\text{معامل}}\quad ;\quad \text{حاصل ضرب الجذرين}=\frac{\text{الحد المطلق}}{x^2\text{معامل}}$$

$$\because\ x^2-(a)x+(5+5i)=0\qquad\qquad \therefore\ (3+i)\times L=\frac{5+5i}{1}$$

$$L=\frac{5+5i}{3+i}\ \Rightarrow\ L=\frac{5+5i}{3+i}\times\frac{3-i}{3-i}=\frac{(15+5)+(15-5)i}{9+1}$$

$$\frac{20+10i}{10}\quad\Rightarrow\quad\boxed{L=2+i}$$

$$\therefore (3+i)+L=\frac{-(-a)}{1}\quad\Rightarrow\quad a=(3+i)+(2+i)\quad\Rightarrow\quad\boxed{\therefore\ a=5+2i}$$

ملاحظـــــــــــــة

يمكن الحل بأستخدام القانونين السابقين لكل الأسئلة المتعلقة بالمعادلات التربيعية ذات المعاملات المجهولة

أختبـــــر نفسك في الأسئلة الوزاريـــــة

[2007]	أذا كان $c,d\in R$ وكان $\left(c+di=\frac{7-4i}{2+i}\right)$ جد $\sqrt{2c-di}$	$\left[Ans:\pm\left(\frac{3}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}i\right)\right]$
[2009]	جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $\left(\frac{14+2i}{1+i}\right)$	$[Ans:\pm(3-i)]$
[2010]	جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $(-1+7i)(1+i)$	$[Ans:\pm(1+3i)]$
[2011]	أذا كان $(3+i)$ هو أحد جذري المعادلة $(x^2-ax+(5+5i)=0)$ فما قيمة وما هو الجذر الأخر	$[Ans:\ a=5+2i\ ;\ (2+i)]$
[2014]	أذا كان $(2+4i)$ هو أحد جذري المعادلة $(2x^2-x-bx+c-6=0)$ معاملاتها حقيقية جد $b,c\in R$	
[2017 دور1]	جد مجموعة الحلول المعادلة في $\mathbb{C}$: $Z^2+2i(3-2i)=3Z$	
[2017 دور2]	كون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية إذا كان أحد جذريها $(\sqrt3-i)^2$	
[2022ط دور2]	أذا كان كل من Z_1,Z_2 عددا مركبا وكان $Z_1\times Z_2=29$, $Z_1+Z_2=4$ جد كل من Z_1,Z_2 ثم كون المعادلة التربيعية التي جذراها Z_1,Z_2	

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

أي أن:- حيث أن الـ(n) عدد صحيح $;r = 0, 1, 2$ $\quad \omega^{3n+r} = \omega^r \quad ; \quad \omega^{3n} = 1$

ملاحظـــــــــــــــة

أي عند وضع الـ(ω) في أبسط صورة فأننا نقوم بقسمة الأس على 3 والباقي هو الأس الجديد .

ملاحظـــــــــــــــة

حاصل جمع أي حدين من الحدود الـ$(\omega^2, \omega, 1)$ المتساويين بالمعامل يساوي الحد الثالث وبعكس أشارة المعامل أي أن الـ$(a\omega + a\omega^2 = -a)$ هو $(a + a\omega^2 = -a\omega)$ و $(a + a\omega = -a\omega^2)$ وكذلك $(-a\omega - a\omega^2 = a)$ وهكذا. حيث أن $\forall a, b \in R$

مثـــال:

$$-4\omega - 4\omega^2 = 4 \quad , \quad 8\omega + 8\omega^2 = -8 \quad , \quad -3 - 3\omega^2 = 3\omega$$

مثـــال: وزاري

برهن أن $2(\omega^{10} + \omega^5 - 2) = 3(\omega^{14} + \omega^7 - 1)$

جـ:

LHS: $2(\omega^{10} + \omega^5 - 2) = 2(\omega + \omega^2 - 2) = 2(-1 - 2) = 2(-3) = -6$

RHS: $3(\omega^{14} + \omega^7 - 1) = 3(\omega^2 + \omega - 1) = 3(-1 - 1) = 3(-2) = -6$

$\because LHS = RHS \quad \Rightarrow \quad \therefore \; 2(\omega^{10} + \omega^5 - 2) = 3(\omega^{14} + \omega^7 - 1)$

مثـــال: وزاري

أثبت أن $\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1-i}\right)^{100} = \frac{-1}{8}\left(1 - \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega}\right)^3$

جـ:

LHS: $\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1-i}\right)^{100} = \left(\frac{(1-i) - (1+i)}{(1+i)(1-i)}\right)^{100} = \left(\frac{1 - i - 1 - i}{1+1}\right)^{100}$

$= \left(\frac{-2i}{2}\right)^{100} = i^{100} = 1$

RHS: $\frac{-1}{8}\left(1 - \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega}\right)^3 = \frac{-1}{8}\left(1 - \frac{\omega^3}{\omega^2} + \frac{\omega^3}{\omega}\right)^3 = \frac{-1}{8}(1 - \omega + \omega^2)^3$

$= \frac{-1}{8}(-\omega + \omega^2 + 1)^3 = \frac{-1}{8}(-\omega - \omega)^3 = \frac{-1}{8}(-2\omega)^3 = \frac{-1}{8}(-8\omega^3) = 1$

$\because LHS = RHS \quad \Rightarrow \therefore \; \left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1-i}\right)^{100} = \frac{-1}{8}\left(1 - \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega}\right)^3$

مثـــال: وزاري

جد ناتج $\left(3\omega^{9n} + \frac{5}{\omega^2} + \frac{4}{\omega}\right)^6$

جـ:

$\left(3\omega^{9n} + \frac{5}{\omega^2} + \frac{4}{\omega}\right)^6 = \left(3\omega^{3(3n)} + \frac{5 \times \omega^3}{\omega^2} + \frac{4 \times \omega^3}{\omega}\right)^6 = (3(1) + 5\omega + 4\omega^2)^6$

$= (3 + 5\omega + 4(-1 - \omega))^6 = (3 + 5\omega - 4 - 4\omega)^6 = (-1 + \omega)^6$

$= ((-1 + \omega)^2)^3 = (1 - 2\omega + \omega^2)^3 = (1 + \omega^2 - 2\omega)^3 = (-3\omega)^3 = -27$

مثـــال: وزاري

جد الجذر التربيعي للعدد $\frac{7 + i\omega + i\omega^2}{1 - i\omega - i\omega^2}$

جـ:

يجب وضع العدد المركب بالصورة العادية أولا ثم نجد الجذر التربيعي وكما يلي:

$\frac{7 + i\omega + i\omega^2}{1 - i\omega - i\omega^2} = \frac{7 + i(\omega + \omega^2)}{1 - i(\omega + \omega^2)} = \frac{7 - i}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{(7 - i)(1 - i)}{1 + 1}$

$= \frac{(7 - 1) + (-7 - 1)i}{2} = 3 - 4i$

والآن نفرض أن $x + yi = \sqrt{3 - 4i}$ وبتربيع الطرفين ينتج: $(x + yi)^2 = 3 - 4i$

ملاحظـــــــــــــــة

-: في أغلب الأحيان إذا أعطى في السؤال كسر وكان يوجد تساوي في الثوابت في البسط والمقام فأننا نضرب العدد الحقيقي في ω^3 ومن ثم نسحب عامل مشترك ثم نكمل الحل كما في المثال الأتي :-

$$\left(\frac{3-2\omega^2}{3\omega-2}-\frac{5-4\omega}{5\omega^2-4}\right)^4 \Rightarrow \left(\frac{3\times\omega^3-2\omega^2}{3\omega-2}-\frac{5\times\omega^3-4\omega}{5\omega^2-4}\right)^4$$

$$\left(\frac{\omega^2\,(3\omega-2)}{3\omega-2}-\frac{\omega\,(5\omega^2-4)}{5\omega^2-4}\right)^4 = (\,\omega^2-\omega)^4 = \left((\,\omega^2-\omega)^2\right)^2$$

$$(\omega-2\omega^3+\omega^2)^2 = (\omega+\omega^2-2)^2 = (-1-2)^2 = (-3)^2 = 9$$

$b)\ \dfrac{\omega}{2-\omega^2}\ ,\quad \dfrac{\omega^2}{2-\omega}$

مجموع الجذرين $\dfrac{\omega}{2-\omega^2}+\dfrac{\omega^2}{2-\omega}=\dfrac{\omega(2-\omega)+\omega^2(2-\omega^2)}{(2-\omega^2)(2-\omega)}$

$$=\frac{2\omega-\omega^2+2\omega^2-\omega}{4-2\omega-2\omega^2+1}=\frac{2(\omega+\omega^2)-(\omega^2+\omega)}{5-2(\omega-\omega^2)}=\frac{-2+1}{5+2}=\frac{-1}{7}$$

ضرب الجذرين $\dfrac{\omega}{2-\omega^2}\times\dfrac{\omega^2}{2-\omega}=\dfrac{\omega^3}{(2-\omega^2)(2-\omega)}=\dfrac{1}{4-2\omega-2\omega^2+1}$

$$=\frac{1}{5-2(\omega-\omega^2)}=\frac{1}{5+2}=\frac{1}{7}$$

المعادلة هي $x^2+\dfrac{1}{7}x+\dfrac{1}{7}=0\ \therefore$

مثـــال :

4) أثبت أن:-

$a)\ \left[\dfrac{1}{2+\omega}-\dfrac{1}{2+\omega^2}\right]^2=\dfrac{-1}{3}$

$$LHS:\ \left(\frac{1}{2+\omega}-\frac{1}{2+\omega^2}\right)^2=\left(\frac{(2+\omega^2)-(2+\omega)}{(2+\omega)\,(2+\omega^2)}\right)^2=\left(\frac{\omega^2-\omega}{4+2\omega^2+2\omega+1}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\omega^2-\omega}{5+2(\omega^2+\omega)}\right)^2=\left(\frac{\omega^2-\omega}{5-2}\right)^2=\frac{\omega^4-2\omega^3+\omega^2}{9}=\frac{-2+\omega+\omega^2}{9}$$

$$=\frac{-2+(-1)}{9}=\frac{-3}{9}=\frac{-1}{3}=RHS$$

أختبـــــر نفسك في الأسئلة الوزاريـــــة

[2012]	كون المعادلة التربيعية التي جذراها $\frac{3}{1-\omega^2}\ ,\ \frac{3}{1-\omega}$	$[Ans: x^2-3x+3=0]$
[2012]	كون المعادلة التربيعية التي جذراها $(1-\omega^2 i)\ ,(1-\omega i)$	$[Ans: x^2-(2+i)x+i=0]$
[2014]	أثبت أن $\left(\frac{5\omega^2 i-1}{5+i\omega}\right)^6=-1$	
[2014]	جد قيمة $\left(3\omega^{9n}+\frac{5}{\omega^5}+\frac{4}{\omega^4}\right)^6$ حيث $n\in Z$	$[Ans:\ -27]$
[2015]	جد قيمة $\left(3\omega^{12n}+\frac{5}{\omega^{11}}+\frac{4}{\omega^{10}}\right)^6$ حيث $n\in Z$	$[Ans:\ -27]$
[2015]	جد قيمة x,y إذا كن $(x+yi)(1-\sqrt{-3})=-2\omega-2\omega^2$	$\left[Ans: x=\frac{1}{2}\ ,y=\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
[2016]	أثبت أن $\left(5-\frac{5}{\omega^2+1}+\frac{3}{\omega^2}\right)^6=64$	
[2017 ط1]	جد قيمة x,y إذا كن $(x+yi)=\left(\sqrt{\omega+\omega^{17}}+\sqrt{\omega+\omega^{38}}\right)^2-\frac{3+i}{1+i}$	$[Ans: x=-6\ \ ,y=1\ ]$
[2017ط دور2]	جد قيمة المقدار $\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega}+3\sqrt{2}\omega+\sqrt{2}\right)^2\left(\frac{1}{\omega}+4\omega+1\right)$	
[2018ط دور1]	كون المعادلة التربيعية التي جذراها $(2-2\omega-2\omega^2)^2\ ,(2\omega+2\omega^2-1)^2$	
[2018ط دور2]	جد قيمة $x,y\in R$ إذا كن $(x+yi)(2+i)=\frac{1}{(1+\omega)^2}+\frac{1}{(1+\omega^2)^2}$	
[2018ط دور3]	جد المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية التي أحد جذريها $\frac{2+\omega i+\omega^2 i}{1-\omega i-\omega^2 i}$	

الصيغة القطبية للعدد المركب

$$R(z) = x = r\cos\theta \quad \dots\dots(1) \; ; \quad I(z) = y = \sin\theta \quad \dots\dots\dots(2)$$

ملاحظـــــة

يسمى r بمقياس العدد المركب z وهو عدد حقيقي غير سالب ويقرأ بـ$(mod\ z)$ أو مقياس العدد z , ويرمز للمقياس العدد z بالرمز $\|z\|$ حيث أن

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\|z\|} \qquad r = \|z\| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\|z\|}$$

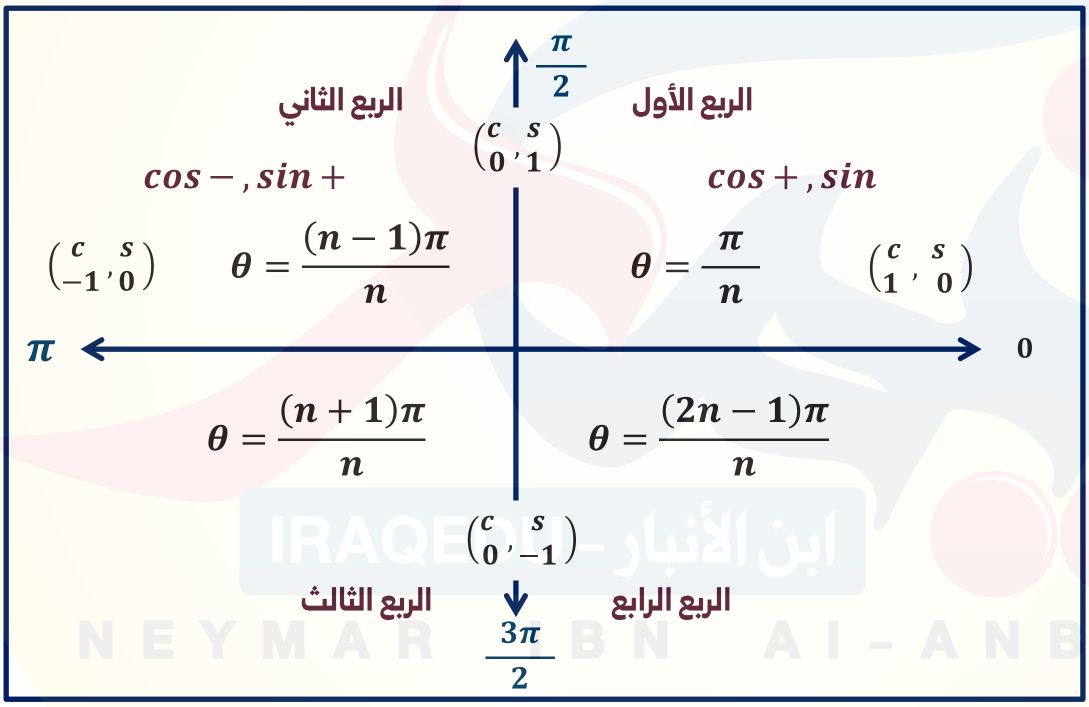
ويسمى قياس θ وتكتب بالشكل بسعة العدد المركب: $(\theta = arg(z))$

ملاحظـــــة

أذا كانت $\left[\theta = \frac{\pi}{n}\right]$ في الربع الأول فعند تحويلها الى الربع:-

1) الثاني فتكون $\left[\theta = \frac{(n-1)\pi}{n}\right]$ 2) الثالث فتكون $\left[\theta = \frac{(n+1)\pi}{n}\right]$ 3) الرابع فتكون $\left[\theta = \frac{(2n-1)\pi}{n}\right]$

- وكذلك يمكن معرفة موقع (θ) في أي ربع وذلك من خلال أشارات الـ$[sin\ , cos]$ كما في الشكل



ملاحظـــــة

تكون الزاوية رئيسية إذا كانت محصورين بين $0 \le \theta < 2\pi$ وتكون غير رئيسية إذا كانت خلاف ذلك

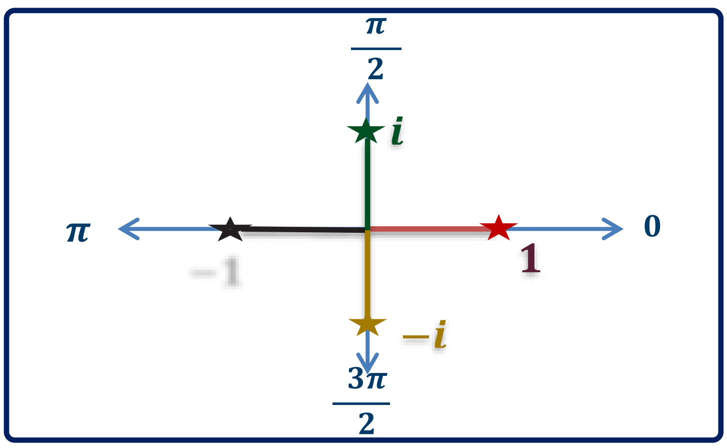
مثـــال:

أذا كانت $z = 1 - \sqrt{3}\,i$ فجد المقياس والقيمة الأساسية لسعة z

جـ:

$$mod(z) = \|z\| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\|z\|} \Rightarrow \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \cos\theta = \frac{x}{\|z\|} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$



- وبما أن الـ$(\sin - , \cos +)$ فهذا يعني أن θ تقع في الربع الرابع وكذلك يتبين من الجدول أن الزاوية التي يكون فيها الـ$\left(\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\ , \cos\theta = \frac{1}{2}\right)$ هي الزاوية $\frac{\pi}{3} = 60$ في الربع الأول فيجب تحويلها الى الربع الرابـع و أي أن $\theta = \frac{(2n-1)\pi}{n}$

$$\therefore \arg(z) = \frac{(2(3)-1)\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

- أي أن بصورة عامة عندما تكون $a \in R$ فأن :-

$$a = a \times 1 = a(\cos 0 + i\ \sin 0) \qquad -a = a \times (-1) = a(\cos \pi + i\ \sin \pi)$$
$$ai = a \times i = a\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\ \sin\frac{\pi}{2}\right) \qquad -ai = a \times (-i) = a\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\ \sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

- أمثلة على ذلك حيث تستخدم هذه الحالة عندما يكون العدد المركب يحتوي على جزء واحد حقيقي أو تخيلي

$$64 = 64 \times 1 = 64(\cos 0 + i\ \sin 0) \qquad -8 = 8 \times (-1) = 8(\cos \pi + i\ \sin \pi)$$
$$27i = 27 \times i = 27\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\ \sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$-16i = 16 \times (-i) = 16\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\ \sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

مبرهنـــــة ديموافـــــر

لكل $\theta \in R,\ n \in N$ فأن : $(\cos\theta + i\ \sin\theta)^n = \cos n\theta + i\ \sin n\theta$

مثــال:

أحسب $(1+i)^{11}$ بأستخدام مبرهنة ديموافر

جـ: فيكون العدد المركب بالصيغة القطبية بالشكل الأتي :-

$$z = 1 + i \implies mod(z) = \sqrt{2}\ ;\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\ , \cos\frac{1}{\sqrt{2}} \implies \therefore arg(z) = \frac{\pi}{4}$$
$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$(1+i)^{11} = z^{11} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{11}$$
$$= \left((\sqrt{2})^2\right)^5 \sqrt{2}\ \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4}\right)^{11}$$
$$= (2)^5\sqrt{2}\ \left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\ \sin\frac{11\pi}{4}\right) \quad \text{لاحظ أن } \frac{11\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$
$$= (32)(\sqrt{2})\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\ \sin\frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{لاحظ أن } \frac{3\pi}{4} \text{ في الربع الثاني}$$
$$= 32(\sqrt{2})\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 32(\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(-1+i)$$
$$= (32)(-1+i) = -32 + 32i$$

$$(\cos\theta + i\ \sin\theta)^{-1} = \cos(-\theta) + i\ \sin(-\theta) = (\cos\theta - i\ \sin\theta)$$

ويمكن تعميم هذه العلاقة بالشكل :-

$$(\cos\theta + i\ \sin\theta)^{-n} = \cos n\theta - i\ \sin n\theta$$

مثــال:

أحسب بأستخدام مبرهنة ديموافر ما يأتي:

جـ:

$b)\ (\sqrt{3}+i)^{-9}$

$$z = \sqrt{3} + i \implies mod(z) = 2\ ;\ \sin\theta = \frac{1}{2}\ , \cos\frac{\sqrt{3}}{2} \implies \therefore arg(z) = \frac{\pi}{6}$$

فيكون العدد المركب بالصيغة القطبية بالشكل الأتي :-

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ \sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$(\sqrt{3}+i)^{-9} = z^{-9} = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ \sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^{-9} = (2)^{-9}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ \sin\frac{\pi}{6}\right)^{-9}$$
$$= (2)^{-9}\left(\cos\frac{9\pi}{6} - i\ \sin\frac{9\pi}{6}\right) = \frac{1}{2^9}\left(\cos\frac{3\pi}{2} - i\ \sin\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{512}(0 - (-1)\,i) = \frac{1}{512}(i) = \frac{1}{512}i$$

مثــال:

3) بسط ما يأتي:

جـ:

$$a)\ \frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^3} = \frac{\cos 10\theta + i\sin 10\theta}{(\cos 9\theta + i\sin 9\theta)} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^9}$$
$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

مثــال:

أستخدم مبرهنة ديموافر لايجاد $\left(\frac{1}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^4$

جـ: يجب أن نكتب العدد بالصيغة القطبية حيث

$$\left(\frac{1}{1-\sqrt{3}\;i}\right)^4 = \frac{1}{(1-\sqrt{3}\;i)^4} = (1-\sqrt{3}\;i)^{-4}$$

نتيجــــة مبرهنـــة ديموافـــــر

$$\sqrt[n]{Z} = (\cos\theta + i\,\sin\theta)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\,\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\;;\;\forall\theta\in R;\quad n\in\mathbb{Q}$$

$$Such\ that\qquad k = 0,1,2,3,\dots,(n-1)$$

مثــال:

5) بأستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد $(27i)$

جـ:

$$let\quad Z = \sqrt[3]{27i} = (27i)^{\frac{1}{3}} = \left(27\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 3\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\,\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\qquad ;k=0,1,2$$

$$= 3\left(\cos\frac{\pi+4k\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi+4k\pi}{6}\right)\qquad ;k=0,1,2$$

$$if\ \ k=0\ \Rightarrow\ Z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi+4(0)\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi+4(0)\pi}{6}\right)$$

$$= 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$if\ \ k=1\ \Rightarrow\ Z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi+4(1)\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi+4(1)\pi}{6}\right)$$

$$= 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$if\ \ k=2\ \Rightarrow\ Z_3 = 3\left(\cos\frac{\pi+4(2)\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi+4(2)\pi}{6}\right)$$

$$= 3\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\,\sin\frac{9\pi}{6}\right)$$

$$= 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 3\,(0+(-1)i) = -3i$$

$\therefore$ الجذور هي $Z = \left\{\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\,, -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\,, -3i\right\}$

ملاحظــــــــــة

في بعض الأحيان يحل السؤال بمبرهنة ديموافر ونتيجتها وهذا يكون عندما يكون الأس كسر فيحل أولا بأستخدام المبرهنة وبعد ذلك نحل بأستخدام النتيجة وكما موضح أدناه

$$(a+bi)^{\frac{m}{n}} \Rightarrow ((a+bi)^m)^{\frac{1}{n}}\quad ;\quad (a+bi)^{\frac{-m}{n}} \Rightarrow ((a+bi)^{-m})^{\frac{1}{n}}$$

مثــال:

أوجد الصيغة القطبية للمقدار $(\sqrt{3}+i)^{\frac{2}{5}}$

جـ: ليكن $[Z = \sqrt{3}+i]$ يجب أن نضع الـ(Z) بالصيغة القطبية وكما يأتي

$$z = \sqrt{3}+i \Rightarrow \|z\| = \sqrt{3+1} = 2\ ;\ \sin\theta = \frac{1}{2}\ ,\cos\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \therefore\ \theta = \frac{\pi}{6}$$

فيكون العدد المركب بالصيغة القطبية بالشكل الأتي:-

$$\therefore\ z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z^2 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^2 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{6} + i\,\sin\frac{2\pi}{6}\right)$$

$$= 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$(z^2)^{\frac{1}{5}} = \left[4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{\frac{1}{5}} = (4)^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5} + i\,\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}\right)$$

$$;\ k = 0,1,2,3,4$$

$$\therefore\ Z^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5} + i\,\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}\right);\qquad k = 0,1,2,3,4$$

$$\therefore \quad Z^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{4}\left(cos\frac{\pi+6k\pi}{15} + i\ sin\frac{\pi+6k\pi}{15}\right) ; \qquad k = 0,1,2,3,4$$

$$if\ \ k=0 \ \Rightarrow \quad Z_1 = \sqrt[5]{4}\left(cos\frac{\pi+6(0)\pi}{15} + i\ sin\frac{\pi+6(0)\pi}{15}\right)$$

$$= \sqrt[5]{4}\left(cos\frac{\pi}{15} + i\ sin\frac{\pi}{15}\right)$$

$$if\ \ k=1 \ \Rightarrow \quad Z_2 = \sqrt[5]{4}\left(cos\frac{\pi+6(1)\pi}{15} + i\ sin\frac{\pi+6(1)\pi}{15}\right)$$

$$= \sqrt[5]{4}\left(cos\frac{7\pi}{15} + i\ sin\frac{7}{15}\right)$$

$$if\ \ k=2 \ \Rightarrow \quad Z_3 = \sqrt[5]{4}\left(cos\frac{\pi+6(2)\pi}{15} + i\ sin\frac{\pi+6(2)\pi}{15}\right)$$

$$= \sqrt[5]{4}\left(cos\frac{13\pi}{15} + i\ sin\frac{13\pi}{15}\right)$$

$$if\ \ k=3 \ \Rightarrow \quad Z_4 = \sqrt[5]{4}\left(cos\frac{\pi+6(3)\pi}{15} + i\ sin\frac{\pi+6(3)\pi}{15}\right)$$

$$= \sqrt[5]{4}\left(cos\frac{19\pi}{15} + i\ sin\frac{19\pi}{15}\right)$$

$$if\ \ k=4 \ \Rightarrow Z_5 = \sqrt[5]{4}\left(cos\frac{\pi+6(4)\pi}{15} + i\ sin\frac{\pi+6(4)\pi}{15}\right)$$

$$= \sqrt[5]{4}\left(cos\frac{5\pi}{3} + i\ sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$\therefore (z^2)^{\frac{1}{5}} = Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5$$

أختبـــــر نفسك في الأسئلة الوزاريـــــة

[واجب]	أحسب ما يأتي $1)\left(\sin\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{-5}$ $\quad 2)\left(cos\frac{5\pi}{4} + i\ cos\frac{7\pi}{4}\right)^{-7}$	
[2012]	عبرعن العدد المركب $(2\sqrt{3} - 2i)$ بالصيغة القطبية	
[2012]	عبرعن العدد المركب بالصيغة القطبية $2\sqrt{3} - 2i$	$\left[Ans: 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\ \sin\frac{11\pi}{6}\right)\right]$
[2013]	بسط ما يأتي : $\frac{(cos\,5\theta + i\ sin\,5\theta)^2}{(cos\,3\theta + i\ sin\,3\theta)^3}$	
[2013]	إذا كان $Z = -2 - 2i$ عبرعن Z بالصيغة القطبية	$\left[Ans: 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\ \sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]$
[2014]	بأستخدام مبرهنة ديموافر جد $(\sqrt{3} + i)^{-9}$	$\left[Ans: (2)^{-9}i = \frac{1}{512}i\right]$
[2014]	جد الصيغة القطبية للمقدار: $\sqrt[5]{(\sqrt{3} + i)^2}$	
[2015]	جد الجذوور التكعيبية للعدد $(125i)$ بأستخدام مبرهنة ديموافر	
[2021 ط1]	كون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي أحد جذريها مقسه (2) وسعته $\left(\frac{5\pi}{3}\right)$	
[2015]	عبرعن العدد بالصيغة القطبية : $\frac{1-3i^2}{1-\omega i-\omega^2 i}$	
[2016]	بأستخدام مبرهنة دي موافر جد الجذور التكعيبية للعدد $(8i)$	
[2016]	بأستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعد : $\frac{1+\omega i+\omega^2 i}{1-\omega i-\omega^2 i}$	
[2017ج]	بأستخدام مبرهنة ديموافر أحسب $(\sqrt{3} + i)^{\frac{-3}{2}}$	$\left[Ans: \pm\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right)\right]$
[2017 ج3]	جد الجذور التربيعية للعدد المركب $(-1 + \sqrt{3}\ i)$ بأستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر	
[2018ج1]	جد حل المعادلة حيث $x \in \mathbb{C}$ وبأستحدام مبرهنة ديموافر $[x^4 + 16 = 0]$	
[2021 ج3]	بأستخدام مبرهنة ديموافرأو بالتعميم أحسب قيمة $\frac{1}{(1+\sqrt{3}\ i)^4}$	

[2د2018]	1) أحسب $\left[\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right]^{-4}$ 2) بأستخدام مبرهنة ديموافر, بسط: $(\cos\theta-i\sin\theta)^4\left[\frac{(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)^2}{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^2}\right]$	
[3د2018]	جد حل المعادلة الآتية بأستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر $\left[\frac{x^3}{3}-9i=0\right]$	
[3د2018]	أثبت أن: $\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^3}{(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)}*(\cos\theta-i\sin\theta)=1$	

$Q\,2:-If\ \ Z=\cos\theta+i\sin\theta\,,then:$

$(1)\ Z+\frac{1}{Z}=2\cos\theta$

$(2)\ Z-\frac{1}{Z}=2i\sin\theta$ $\quad(3)\ Z^n+\frac{1}{Z^n}=2\cos n\theta$ $\quad(4)\ Z^n-\frac{1}{Z^n}=2i\sin n\theta$

$(5)\ Z(1+\bar{Z})=1+Z$ $\quad(6)\ \frac{1-Z^2}{Z^2+1}=-i\tan\theta$ $\quad(7)\ \frac{Z^n}{1+Z^{2n}}=\frac{1}{2\cos n\theta}$

الفصل الثاني القطوع المخروطية

القطـــــع المكافــئ

$F\in Y^+$	$F\in X^+$
• معادلة القطع: $x^2=4py$ • البؤرة: $F(0,p)$ • معادلة الدليل: $y=-p$	• معادلة القطع: $y^2=4px$ • البؤرة: $F(p,0)$ • معادلة الدليل: $x=-p$
$F\in Y^-$	$F\in X^-$
• معادلة القطع: $x^2=-4py$ • البؤرة: $F(0,-p)$ • معادلة الدليل: $y=p$	• معادلة القطع: $y^2=-4px$ • البؤرة: $F(-p,0)$ • معادلة الدليل: $x=p$

- دائمًا البؤرة ومعادلة القطع من نفس الإشارة، ومعادلة الدليل تخالفهما.

حالات القطع المكافىء القطع المكافئ حسب التعريف

- إعطاء المعادلة ويطلب البؤرة والدليل
- إعطاء البؤرة ويطلب المعادلة والدليل
- إعطاء الدليل ويطلب المعادلة والبؤرة
- إعطاء نقطة تنتمي للقطع ويطلب المعادلة
- إعطاء نقطتين تنتميان للقطع ويطلب المعادلة
- إعطاء نقطة تنتمي للدليل ويطلب المعادلة
- إيجاد نقطة تبعد عن البؤرة بمسافة معينة
- إيجاد ثابت مجهول في معادلة القطع

- ولكن حالة توجد ملاحظة للحل، ويجب تطبيق الملاحظة للحل.

ملاحظـــــــــــة

تكون أشارة معادلة الدليل عكس أشارة معادلة القطع وتكون اشارة البؤرة نفس أشارة معادلة لقطع

مثـــال1:

جد البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ الذي معادلته $3x^2 - 24y = 0$

جـ:
يجب جعل معامل الـ(x^2) واحد , فنقسم المعادلة $3x^2 - 24y = 0$ على 3 نحصل على:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 8py \\ x^2 = 4py \end{array}\right\} \Rightarrow 4p = 8 \Rightarrow p = \frac{8}{4} \Rightarrow \therefore\ p = 2 \qquad F \in y^+$$

ومعادلة الدليل هي $y = -2$; والبؤرة $\therefore F(0\,,2)$

مثـــال2:

جد معادلة القطع المكافئ إذا علم : (A) بؤرته $(3\,,0)$ ومركزه نقطة الأصل. (B) معادلة دليله $(2x - 6 = 0)$

جـ:
A) $\because F(P\,,0) \Rightarrow F(3\,,0) \Rightarrow P = 3 \qquad F \in x^+$

نعوض بالمعادلة القياسية $y^2 = 4px$ فنحصل على معادلة القطع المكافئ $y^2 = 12x$.

B) $2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow P = 3$

من معادلة الدليل نجد ان البؤرة تنتمي للمحور السيني السالب فنستخدم المعادلة $y^2 = -4px$

$\therefore y^2 = -12x$

مثـــال3:

بأستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ أذا علمت أن بؤرته $(\sqrt{3}, 0)$ والرأس فى نقطة الأصل.

جـ:
البؤرة $F(\sqrt{3}, 0)$, لتكن النقطة $M(x, y)$ من نقاط القطع المكافئ, والنقطة $Q(-\sqrt{3}, y)$ هي نقطة تقع على الدليل وتكون التقاطع العمود المرسوم من M الى $\overleftrightarrow{D}$ ومن تعريف القطع المكافئ $\overline{MF} = \overline{MQ}$

$$\because\ \overline{MF} = \overline{MQ} \Rightarrow \therefore \sqrt{\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x + \sqrt{3}\right)^2 + (y - y)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 + 0} \quad \text{بتربيع الطرفين}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + y^2 = x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$$

$$\Rightarrow y^2 = x^2 - x^2 + 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}x + 3 - 3$$

$$\boxed{\Rightarrow \therefore y^2 = 4\sqrt{3}x}$$

ملاحظــــــــــــة

إذا أعطى فى السؤال نقطتان تنتميان للقطع وكانت هذه النقطتان متناظرة حول أحد المحورين فأن البؤرة تنتمي الى المحور المتناظر

مثـــال4:

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2, 4), (2, -4)$

جـ:
بما أن النقطتان متناظرتان حول المحور السيني فتكون البؤرة على المحور السيني
فنعوض أحدى النقطتين في المعادلة القياسية $y^2 = 4px$ فلتكن النقطة $(2, 4)$ فينتج:-

$(4)^2 = 4p(2) \Rightarrow 16 = 8\,p \Rightarrow p = 2$
$y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4(2)x \Rightarrow y^2 = 8x$

مثـــال5:

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر دليل القطع المكافئ بالنقطة $(3, -5)$

جـ: يوجد للحل أحتمالان:

أولا: - البؤرة تنتمي المحور الصادي معادلة الدليل $y = -5$ $p = 5 \Rightarrow F(0, 5)$ فتكون معادلة القطع المكافئ القياسية هي $\therefore x^2 = 20y$ $\therefore x^2 = 20y$	ثانيا: - البؤرة تنتمي للمحور السيني معادلة الدليل $x = 3$ $p = 3 \Rightarrow F(-3, 0)$ فتكون معادلة القطع المكافئ القياسية هي $\because y^2 = -4px$ $\therefore y^2 = -12x$

ملاحظــــــــــــة

إذا لم يذكر أنتماء البؤرة الى أي محور فيجب أخذ أحتمالين عند الحل الأحتمال الأول البؤرة تنتمي للمحور السيني و الأحتمال الثاني البؤرة تنتمي للمحور الصادي

مثـــال6:

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(1, -3), (1, 3)$ والرأس في نقطة الأصل.

جـ:
أولا: - بما أن النقطتان متناظرتان حول المحور السيني فتكون البؤرة على المحور السيني
فنعوض أحدى النقطتين في المعادلة القياسية $y^2 = 4px$ فلتكن النقطة $(1, 3)$ فينتج:-

$(3)^2 = 4p(1) \quad \Rightarrow \quad 9 = 4p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{9}{4}$

$y^2 = 4px \;\Rightarrow\; y^2 = 4\left(\frac{9}{4}\right)x \;\Rightarrow\; y^2 = 9x$

ملاحظة

إذا كان هناك نقطة تنتمي للقطع فهذا يعني أن النقطة تحقق المعادلة أي نعوض النقطة (x,y) في المعادلة القياسية ثم نجد قيمة p كما في المثال

مثال9:

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطة $(-2\,,5)$ والرأس في نقطة الأصل .

جـ:

بما أنه لم يحدد البؤرة في السؤال فأننا نأخذ هنا الأحتمالين

ثانيا: البؤرة تنتمي للمحور الصادي	أولا: البؤرة تنتمي للمحور السيني
نعوض النقطة $(-2\,,5)$ في المعادلة القياسية $x^2 = 4py \;\Rightarrow\; (-2)^2 = 4p(5)$ $4 = 20p \;\Rightarrow p = \frac{1}{5}$ فتكون معادلة القطع المكافئ القياسية هي $\because x^2 = 4py \Rightarrow \therefore x^2 = \frac{4}{5}y$	نعوض النقطة $(-2\,,5)$ في المعادلة القياسية $y^2 = -4px \;\Rightarrow (5)^2 = -4p(-2)$ $25 = 8p \;\Rightarrow p = \frac{25}{8}$ فتكون معادلة القطع المكافئ القياسية هي $\because y^2 = -4px \Rightarrow \therefore y^2 = \frac{-25}{2}x$

أنسحاب المحاور للقطع المكافئ

ملاحظة

عند الأنسحاب أذا كانت المعادلة القياسية موجبة فعند أيجاد البؤرة نضيف P للأحداثي التي تنتمي إليه البؤرة ومعادلة الدليل نطرح P من الأحداثي التي تنتمي إليه البؤرة , أذا كانت المعادلة القياسية سالبة فعند أيجاد البؤرة نطرح P من الأحداثي التي تنتمي إليه البؤرة ومعادلة الدليل نضيف P للأحداثي التي تنتمي إليه البؤرة . يقصد بأحداثي رأس القطع $\bar{O}(h,k)$

ملاحظة

عند الأنسحاب أذا لم يعطي المعادلة القياسية وطلب أيجاد البؤرة ومعادلة الدليل والرأس وأعطى معادلة في السؤال فيكون الحل بأكمال المربع حيث نضيف ونطرح مربع نصف معامل المتغير وكما في الأمثلة اللاحقة .

مثال1:

من معادلة القطع المكافئ $(y+1)^2 = 4(x-2)$ عين الرأس , البؤرة , ومعادلة المحور , معادلة الدليل.

جـ:

بالمقارنة بالمعادلة العامة للقطع المكافئ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

نجد أن الرأس $h = 2\;,\; k = -1 \quad \Rightarrow \therefore\; (h\,,k) = (2,-1)$

البؤرة هي $p = 1 \;\Rightarrow\; \because\; F(h+p\,,k) \qquad \therefore\; F(2+1,-1) \Rightarrow F(3,-1)$

معادلة المحور $\because y = k \Rightarrow \therefore y = -1$

معادلة الدليل هي $\because x = h - p \quad \Rightarrow \quad \therefore x = 2-1 \qquad x = 1$

مثال2:

ناقش القطع المكافئ $y = x^2 + 4x$

جـ:

لاحظ يجب أكمال المربع للمتغير المرفوع للقوة الثانية وذلك بأضافة مربع نصف معامل x وهو 4 للطرفين وبعدها نحللها مربع كامل وكما يأتي

$y + 4 = x^2 + 4x + 4$

$y + 4 = x^2 + 4x + 4 \qquad y + 4 = (x+2)^2$

$(x+2)^2 = (y+4)$

وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة القياسية

$(x-h)^2 = 4p\,(y-k) \qquad 4p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$

نجد أن الرأس $h = -2\,,\;\; k = -4 \qquad \therefore\; (h\,,k) = (-2,-4)$

البؤرة هي $\because\; F(h\,,k+p) \qquad \Rightarrow \therefore\; F\left(-2,-4+\frac{1}{4}\right) \;\Rightarrow\; F\left(3,-3\frac{3}{4}\right)$

معادلة المحور $\because x = h \qquad \Rightarrow \therefore x = -2$

معادلة الدليل $\because y = k - p \;\Rightarrow\; \therefore y = -4 - \frac{1}{4} \Rightarrow y = -4\frac{1}{4}$ معادلة الدليل

مثال3:

من معادلة القطع المكافئ $x^2 + 8y - 2x = 7$ عين الرأس والبؤرة ومعادلة المحور ومعادلة الدليل .

جـ:

بأكمال المربع نضيف لطرفي المعادلة واحد ينتج:

$x^2 - 2x = -8y + 7$

$x^2 - 2x + 1 = -8y + 7 + 1 \qquad (x-1)^2 = -8y + 8$

وبالمقارنة بالمعادلة القياسية $(x-h)^2 = -4p(y-k) \qquad (x-1)^2 = -8(y-1)$

نجد أن الرأس $h = 1 \;,\; k = 1 \Longrightarrow \therefore (h, k) = (1, 1)$

$4p = 8 \Longrightarrow p = 2 \;\because F(h, k - p)$

البؤرة هي $\therefore F(1, 1 - 2) = F(1, -1)$

معادلة المحور $\because x = h$ معادلة المحور $\Longrightarrow \therefore x = 1$

معادلة الدليل $\because y = k + p$

معادلة الدليل هي $\therefore y = 1 + 2 \qquad y = 3$

ثانياً:- القطع الناقص

القطع الناقص بؤرتاه تنتمي لمحور السينات	القطع الناقص بؤرتاه تنتمي لمحور الصادات
بؤرتاه هما $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$	بؤرتاه هما $F_1(0, c), F_2(0, -c)$
الرأسان هما $v_1(a, 0), v_2(-a, 0)$	الرأسان هما $v_1(0, a), v_2(0, -a)$
القطبان هما $(0, b), (0, -b)$	القطبان هما $(b, 0), (-b, 0)$
معادلة القطع $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	معادلة القطع $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
$2c$تمثل البعد بين البؤرتين $2a$طول المحور الكبير $2b$طول المحور الصغير	
$c^2 = a^2 - b^2 \;;\; c, a, b > 0 \;\; and \;\; a > b$	

ملاحظـــــــــــــــــــة

تسمى النسبة $\frac{c}{a}$ بالأختلاف المركزي , أي ان $e = \frac{c}{a}$ وتكون أقل من الواحد في القطع الناقص.

الفرق بين طولى محوريه $\propto$ فهذا يعنى $2a - 2b = \propto$

مثـــال1:

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الأصل وبؤرتاه على المحور السينات والمسافة بين البؤرتين (6) وحدات , والفرق بين طولي المحورين يساوي (2) وحدة .

جـ:

المسافة بين البؤرتين هي $2c = 6 \Longrightarrow c = 3 \Longrightarrow c^2 = 9$

و بما أن الفرق بين المحورين وحدتين فنحصل على $2a - 2b = 2 \quad \div 2 \Longrightarrow a - b = 1$

$a = 1 + b \ldots\ldots (1) \quad \Longrightarrow \because c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow a^2 - b^2 = 9 \ldots\ldots (2)$

$(1 + b)^2 - b^2 = 9 \quad \Longrightarrow 1 + 2b + b^2 - b^2 = 9$

$2b + 1 = 9 \Longrightarrow 2b = 9 - 1 \Longrightarrow b = 4 \Longrightarrow b^2 = 16$

$a = 1 + b \Longrightarrow a = 1 + 4 = 5 \Longrightarrow \therefore a^2 = 25$

معادلة القطع الناقص $\therefore \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

أحدى بؤرتيه هى بؤرة القطع المكافئ أو بؤرة المكافئ هى بؤرة الناقص يعنى $C\_ = p$

مثـــال2:

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وأحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$, وطول محوره الصغير(10) وحدات .

جـ:

من القطع المكافئ نجد البؤرة $y^2 = 12x$ بالمقارنة مع معادلة القطع المكافئ $y^2 = 4px$

$4p = 12 \Longrightarrow p = 3 \Longrightarrow F(3, 0)$

$C\_ = p = 3 \Longrightarrow c^2 = 9 \;\; and \;\; F \in x$

$2b = 10 \Longrightarrow b = 5 \Longrightarrow b^2 = 25$

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow \therefore a^2 = 25 + 9 \Longrightarrow a^2 = 34$

معادلة القطع الناقص $\therefore \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$

ملاحظـــــــــــــــــــة

إذا كان القطع الناقص يمر بنقطتي تقاطع المنحني (معادلة المنحني من السؤال) مع المحوين فأننا نجد نقط التقاطع مع

A) السينات / نجد نقط التقاطع بجعل الـ$(y = 0)$ نجد الأحداثي السني حيث يمثل أما الـ(a) أو الـ(b)

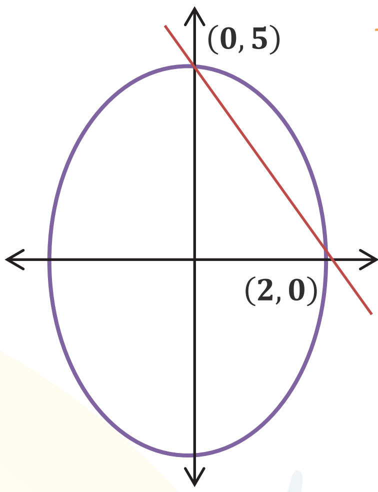
B) الصادات / نجد نقط التقاطع بجعل الـ$(x = 0)$ نجد الأحداثي السني حيث يمثل أما الـ(a) أو الـ(b)

حيث يمثل الـ(a) الأحداثى الأكبر ويمثل الـ(b) الأحداثى والصغر

مثــــال3:

جد معادلة القطع الناقص الذي يمر بنقطتي تقاطع المستقيم الذي معادلته $5x + 2y - 10 = 0$ مع المحورين الأحداثيين.

جـ:



بما أن المستقيم $5x + 2y = 10$ يقطع المحورين الأحداثيين

التقاطع مع المحور السيني $\Leftarrow y = 0$

$$5x = 10 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2,0)$$

التقاطع مع المحور الصادي $\Leftarrow x = 0$

$$2y = 10 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow (0,5)$$

$\therefore$ بؤرتي القطع الناقص تقع على المحور الصادي لأن المحور الكبير يقع على الصادي

$\therefore a = 5 \Rightarrow a^2 = 25 \qquad \therefore b = 2 \Rightarrow b^2 = 4$

معادلة القطع الناقص $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

مثــــال4:

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان الى المحور السينات مركزه في نقطة الأصل وطول محوره الكبير ضعف طول المحور الصغير ويقطع القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ عند النقطة التي أحداثيها السيني -2

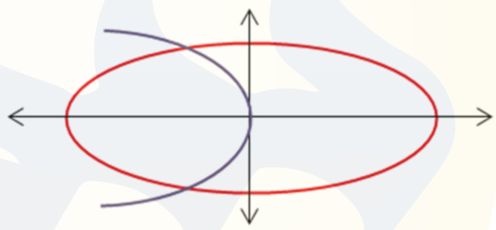
جـ:

من القطع المكافئ: وبما أن القطع الناقص يقطع القطع المكافئ عند $x = -2$ فأن النقطة التقاطع تنتمي للقطعين الناقص والمكافئ عند $x = -2$ لذلك فأنها تحقق معادلة القطع المكافئ ويمكن أيجاد y وكما يلي:

$$y^2 = -8x \Rightarrow y^2 = -8(-2) \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4 \Rightarrow (-2 , \pm 4)$$

النقطة $(-2 , \pm 4)$ تنتمي للقطع الناقص تحقق معادلته

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \ldots\ldots\ldots (1)$$



وبما أن طول المحور الكبير يساوي ضعف طول المحور الصغير فيكون

$$2a = 2(2b) \Rightarrow a = 2b \Rightarrow a^2 = 4b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{17}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 17$$

$$a^2 = 4b^2 = 68$$

معادلة القطع الناقص هي $\boxed{\dfrac{x^2}{68} + \dfrac{y^2}{17} = 1}$

مثــــال5:

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على المحور السينات ويكون البعد بين بؤرتيه مساوياً للبعد بين بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 24x = 0$

جـ:

من القطع المكافئ نجد البؤرة $y^2 = -24x$ بالمقارنة بالمعادلة $y^2 = -4px$ نجد أن

$$p = \frac{2}{4} \Rightarrow p = 6 \Rightarrow F(-6,0) \Rightarrow \boxed{2p = 12}$$

بالنسبة للقطع الناقص $2C_- = 2p$

$2c = 12 \Rightarrow c = 6$

$F(\pm 6,0)$ البؤرتان $\Rightarrow c^2 = 36 \qquad \therefore c^2 = a^2 - b^2$

$36 = a^2 - b^2 \quad \ldots\ldots (1)$

$$A = ab\pi \Rightarrow ab\pi = 80\pi \Rightarrow a = \frac{80\pi}{b\pi} \Rightarrow a^2 = \frac{6400}{b^2} \ldots\ldots (2)$$

بتعويض (2) في (1) ينتج $\frac{6400}{b^2} - b^2 = 36$

$$6400 - b^4 = 36b^2 \Rightarrow b^4 + 36b^2 - 6400 = 0$$

$(b^2 + 100)(b^2 - 64) = 0 \qquad either\ b^2 + 100 = 0$ يهمل

$$or\ b^2 - 64 = 0 \Rightarrow b^2 = 64 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow a^2 = \frac{6400}{b^2}$$

$$a^2 = \frac{6400}{64} \Rightarrow a^2 = 100$$

معادلة القطع الناقص هي $\boxed{\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1}$

النقطة Q تنتمي للقطع بحيث محيط المثلث F_1F_2Q يساوي $\propto$
أي أن $2c+2a=\propto \quad \Longrightarrow \quad F_1F_2+F_1Q+F_2Q=\propto$

مثـــال6:

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1(5\,,0)\,,\ F_2(-5\,,0)$ والنقطة $P(x\,,y)$ تنتمي للقطع الناقص بحيث محيط المثلث F_1F_2P يساوي (26) وحدة .

جـ:

محيط المثلث يساوي مجموع أضلاعه الثلاثة أي

$$\Delta F_1F_2P=\overline{F_1F_2}+\overline{F_1P}+\overline{F_2P}=26$$

$$but\quad \overline{F_1F_2}=2c\quad and\quad \overline{F_1P}+\overline{F_2P}=2a$$

$$\overline{F_1F_2}+\overline{F_1P}+\overline{F_2P}=26 \quad\Longrightarrow\quad 2c+2a=26 \overset{\div 2}{\Longrightarrow} \therefore\ c+a=13$$

$$but\quad c=5 \Longrightarrow 5+a=13 \quad\Longrightarrow\quad a=13-5 \Longrightarrow a=8 \Longrightarrow a^2=64$$

$$\therefore c^2=a^2-b^2 \Longrightarrow 25=64-b^2 \Longrightarrow b^2=64-25 \Longrightarrow b^2=39$$

معادلة القطع الناقص هي $\boxed{\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{39}=1}$

ملاحظـــــــــــــة

اذا مر القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل بنقطتين تقعان على محورين مختلفين فإن الرأس يمثل النقطة ذات المطلق الأكبر والقطب يمثل النقطة ذات المطلق الأصغر.

مثـــال6:

جد معادلة القطع الناقص الذي يمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x+3y=12$ مع محور السينات ومساحة منطقته $24\ \pi$ وحدة مساحة

جـ:

التقاطع مع المحور السيني $y=0 \quad \Longleftarrow \quad 2x=12 \Longrightarrow x=6 \Longrightarrow (6,0)$

بما أن النقطة $(6,0)$ تنتمي للقطع فهذا يعني $either\quad a=6 \quad or \quad b=6$

$$ab\pi=24\pi \Longrightarrow ab=24 \quad\Longrightarrow\quad b=\frac{24}{a}\quad or\quad a=\frac{24}{b}$$

$$if\begin{cases} either\ \ a=6 \Longrightarrow b=\dfrac{24}{6} \Longrightarrow b=4 \Longrightarrow a>b \\ or\quad b=6 \Longrightarrow a=\dfrac{24}{6} \Longrightarrow a=4 \Longrightarrow a<b \end{cases}$$ يهمل

معادلة القطع الناقص هي $\boxed{\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1}$

القطع الناقص يمر ببؤرة القطع المكافئ(يوجد أحتمالين) أما $a_- = p$ أو $b_- = p$ حسب موقع البؤرة لكل منهما
أو القطع الناقص يمس دليل القطع المكافئ (يوجد أحتمالين) أما $a_- = p$ أو $b_- = p$ حسب موقع البؤرة لكل منهما (حسب السؤال)

مثـــال6:

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والمار ببؤرة القطع المكافئ $x^2+12y=0$ والبعد بين بؤرتيه 6 وحدات.

جـ:

من القطع المكافئ نجد البؤرة $x^2=-12$

$p=\dfrac{12}{4} \Longrightarrow p=3$ البؤرة $F(0,-3)$ $\Longrightarrow$ معادلة الدليل $y=3$

$2c=6 \Longrightarrow c=3 \Longrightarrow c^2=9$

$$p=3\in y \Longrightarrow \begin{cases} p=3=a_- & \text{إما} \\ p=3=b_- & \text{أو} \end{cases}$$

لاحظ لا يمكن أن يكون a يساوي c أو b ولكن دائما أكبر منهما في القطع الناقص أي أن

$$\therefore\ b=3 \Longrightarrow b^2=9\in y \quad\Longrightarrow\quad c^2=a^2-b^2$$

$$9=a^2-9 \quad\Longrightarrow\quad a^2=9+9=18\in x$$

معادلة القطع الناقص هي $\boxed{\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1}$

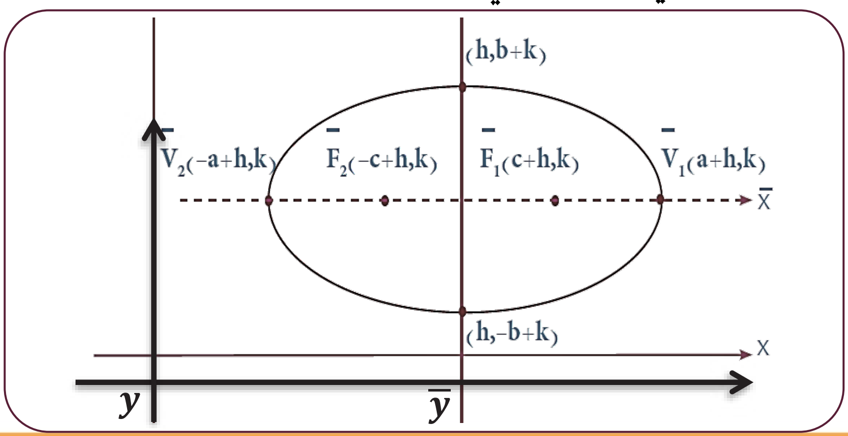
أختبـــــر نفسك في الأسئلة الوزاريـــــة

[2012]	جد معادلة القطع الناقص الذي ومركزه نقطة الأصل وينطبق محوراه على المحورين الأحداثيين ويقطع من محور السينات جزءاً طوله (8) وحدات ومساحته (24π)	$\left[Ans:\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1\right]$
[2014]	جد معادلة القطع الناقص الذي أحدى بؤرتيه هي بؤرة المكافئ الذي معادلته $y^2+8x=0$ علماً أن القطع يمر بالنقطة $(2\sqrt{3},\sqrt{3})$	$\left[Ans:\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1\right]$
[2014]	جد معادلة القطع الناقص الذي أحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين $(1,5)$ على الترتيب وبؤرتاه تقعان على محور الصادات ومركزه نقطة الأصل	$\left[Ans:\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1\right]$
[2015]	جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور الصادات ومساحته (32π) وحدة مساحة والنسبة بين طولي محوريه $=\left(\frac{1}{2}\right)$.	$\left[Ans:\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{64}=1\right]$
[2016]	جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على المحور السينات ويكون البعد بين بؤرتيه مساوياً للبعد بين بؤرة القطع المكافئ $y^2+24x=0$ ودليله إذا علمت أن مساحة منطقة القطع الناقص تساوي 80π وحدة مربعة .	$\left[Ans:\ \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1\right]$
[2017ط1]	جد معادلة القطع الناقص الذي أحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2-16x=0$ ومجموع بعدي نقطة عليه عن البؤرتين يساوي (24) وحدة	$\left[Ans:\ \frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{128}=1\right]$
[2017ح1]	جد معادلة القطع الناقص الذي طول محوره الكبير يساوي (12) وأحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2-12y=0$ بطريقة التعريف.	$\left[Ans:\ \frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{36}=1\right]$
[2017ح2]	قطع ناقص معادلته $h\,x^2+k\,y^2=36$ مركزه نقطة الأصل ومجموع مربعي طولي محوريه 60 وحدة, وأحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2=4\sqrt{3}x$ ماقيمة كل من $h,\ k$ ؟	$[Ans:\ h=4,\quad k=6]$
[2016خ3]	جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين $(3,4)$, $(6,2)$؟	
[2017د1/2017ت/2012/2019ت]	جد معادلة القطع الناقص الذي أحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $x^2=24y$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة	
[2018ح1]	جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الأصل ومساحة منطقته (10π) ومحيطه (7π)	$\left[Ans:\ \frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{1}=1\right]$
[2018ط2]	إذا كان $\frac{11+2i}{1+2i}=d+e\,i$ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وأحدى بؤرتيه هي بؤرتي $(0\ ,e)$ وطول محوره الكبير $2\|d+e\,i\|$ ؟	
[2022ح1]	جد معادلة القطع الناقص والذي بؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2+y^2-3x=16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2=12x$.	

أنسحاب المحاور للقطع الناقص

أولاً :- القطع الناقص الذي مركزه (h,k) الناتج من أنسحاب (h) وحدة من المحور السيني و (k) وحدة من المحور الصادي ومحوره الكبير يوازي المحورالسيني فتصبح معادلته القياسية بالصورة:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



نلاحظ أن

1 المحور الكبير يوازي المحور السيني وطوله $(2a)$ ومعادلته $(y = k)$ والمحور الصغير يوازي المحور الصادي وطوله $(2b)$ ومعادلته $(x = h)$.

2 حيث تكون البؤرتان $F(h \pm c, k) \Rightarrow F_1(h + c, k),\ F_2(h - c, k)$

3 حيث يكون الرأسان $V(h \pm a, k) \Rightarrow V_1(h + a, k),\ V_2(h - a, k)$

4 حيث يكون القطبان $M(h, k \pm b) \Rightarrow M_1(h, k + b),\ M_2(h, k - b)$

ثانيا :- القطع الناقص الذي مركزه (h, k) الناتج من أنسحاب (h) وحدة من المحور السيني و (k) وحدة من المحور الصادي ومحوره الكبير يوازي المحور الصادي فتصبح معادلته القياسية بالصورة:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

نلاحظ أن

1 المحور الكبير يوازي المحور الصادي وطوله $(2a)$ ومعادلته $(x = h)$ والمحور الصغير يوازي المحور الصادي وطوله $(2b)$ ومعادلته $(y = k)$.

2 حيث تكون البؤرتان $F(h, k \pm c) \Rightarrow F_1(h, k + c),\ F_2(h, k - c)$

3 حيث يكون الرأسان $V(h, k \pm a) \Rightarrow V_1(h, k + a),\ V_2(h, k - a)$

4 حيث يكون القطبان $M(h \pm b, k) \Rightarrow M_1(h + b, k),\ M_2(h - b, k)$

مثال:

في القطع الناقص $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ جد البؤرتين والرأسين وطول ومعادلة كل من المحورين للقطع الناقص ثم جد قيمة e.

جـ:

بالمقارنة بالمعادلة القياسية للقطع الناقص

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

نلاحظ أن $(h, k) = (2, 1)$

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

طول المحور الكبير $2a = 10$

معادلة المحور الكبير $x = h \Rightarrow x = 2$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

طول المحور الصغير $2b = 6$

معادلة المحور الصغير $y = k \Rightarrow y = 1$

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow \therefore c^2 = 25 - 9$

$c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

$\because F(h, k \pm c) \Rightarrow \therefore F(2, 1 \pm 4)$

البؤرتان هما $F_1(2, 5)$ and $F_2(2, -3)$

$\because V(h, k \pm a) \Rightarrow \therefore V_1(2, 1 \pm 5)$

الرأسان هما $V_1(2, 6)$ and $V_2(2, -4)$

الأختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{4}{5} < 1$

مثال:

عين كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والأختلاف المركزي للقطوع الناقصة المبينة معادلتها في كل مما يأتي:

جـ:

c) $\frac{(x-4)^2}{81} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$

بالمقارنة بالمعادلة القياسية للقطع الناقص

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

نلاحظ أن $(h, k) = (4, -1)$

$a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$

طول المحور الكبير $2a = 18$

معادلة المحور الكبير $y = k \Rightarrow y = -1$

$b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$

طول المحور الصغير $2b = 10$

معادلة المحور الصغير $x = h \Rightarrow x = 4$

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow \therefore c^2 = 81 - 25$

$c^2 = 56 \Rightarrow c = \sqrt{56}$

$\because F(h \pm c, k) \Rightarrow \therefore F(4 \pm \sqrt{56}, -1)$

$F_1(4 + \sqrt{56}, -1),\ F_2(2 - \sqrt{56}, -1)$

$\because V(h \pm a, k) \Rightarrow \therefore V_1(4 \pm 9, -1)$

$V_1(13, -1)$ and $V_2(-5, -1)$

الأختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{56}}{9} < 1$

ملاحظـــــــــــــة

في هذا المثال الأتي وجميع الأسئلة المشابهة له دائماً يكون الحل بأكمال المربع بالنسبة للمتغيرين وبعد ذلك نقوم بالتحليل الحدوديتين كل منها بالمربع الكامل ثم نقسم على العدد الباقي للطرفين فنحصل على المعادلة القياسية للقطع الناقص.

مثـــال:

فى القطع الناقص $9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 4 = 0$ جد مركز القطع وطول المحورين والبؤرتين .

جـــ:

نقوم بترتيب المعادلة أولا ثم نحلل بأخراج العامل المشترك الأكبر وكما يلي

$9x^2 + 36x + 4y^2 - 8y = 4 \quad \Rightarrow \quad 9(x^2 + 4x) + 4(y^2 - 2y) = -4$

$9(x^2 + 4x + 4 - 4) + 4(y^2 - 2y + 1 - 1) = -4$ **قمنا بأكمال المربع**

$9(x^2 + 4x + 4) - (9 \times 4) + 4(y^2 - 2y + 1) - 4 \times 1 = -4$

$9(x+2)^2 - 36 + 4(y-1)^2 - 4 = -4 \Rightarrow 9(x+2)^2 + 4(y-1)^2 = 36 \quad \div 36$

$\frac{9(x+2)^2}{36} + \frac{4(y-1)^2}{36} = \frac{36}{36} \quad \Rightarrow \therefore \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ المعادلة القياسية

$\overline{O}(h,k) = \overline{O}(-2,1)$ مركز القطع ; $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow 2a = 6$ طول المحور الكبير

$b^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad b = 2 \quad \Rightarrow 2b = 4$ طول المحور الصغير

$c^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 9 - 4 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{5}$

$\because F_1(h, k+c) \quad \Rightarrow \quad \therefore F_1(-2, 1+\sqrt{5})$ **البؤرتان هما** $\therefore$

$\because F_2(h, k-c) \quad \Rightarrow \quad \therefore F_2(-2, 1-\sqrt{5})$

مثـــال:

عين كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والأختلاف المركزي للقطوع الناقصة المبينة معادلتها في كل مما يأتي :-

1) $25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y - 44 = 0$ واجب

2) $9x^2 + 16y^2 - 72x - 96y + 144 = 0$

$9x^2 - 72x + 16y^2 - 96y = -144 \quad \Rightarrow \quad 9(x^2 - 8x) + 16(y^2 - 6y) = -144$

$9(x^2 - 8x + 16 - 16) + 16(y^2 - 6y + 9 - 9) = -144$

$9((x-4)^2 - 16) + 16((y-3)^2 - 9) = -144$

$(9(x-4)^2 - 144) + (16(y-3)^2 - 144) = -144$

$9(x-4)^2 + 16(y-3)^2 - 288 = -144 \quad \Rightarrow \quad 9(x-4)^2 + 16(y-3)^2 = 144$

$\frac{9(x-4)^2}{144} + \frac{16(y-3)^2}{144} = \frac{144}{144} \;\therefore \frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ المعادلة القياسية

$(h,k) = (4,3)$ نلاحظ أن $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$a^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad a = 4 \quad \Rightarrow \quad 2a = 8$ طول المحور الكبير

$b^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad b = 3 \quad \Rightarrow \quad 2b = 6$ طول المحور الصغير

$y = k \quad \Rightarrow \quad y = 3$ معادلة المحور الكبير $\quad x = h \Rightarrow x = 4$ معادلة المحور الصغير

$\because c^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad \therefore c^2 = 16 - 9 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 7 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{7}$

$\because F_1(h, k+c) \quad \Rightarrow \quad \therefore F_1(4+\sqrt{7}, 3)$ البؤرتان هما $\therefore$

$\because F_1(h, k+c) \quad \Rightarrow \quad \therefore F_1(4-\sqrt{7}, 3)$

$\because V_1(h, k+a) \quad \Rightarrow \quad \therefore V_1(4+4, 3) \Rightarrow V_1(8,3)$ الرأسان هما $\therefore$

$\because V_2(h, k-a) \quad \Rightarrow \quad \therefore V_2(4-4, 3) \Rightarrow V_2(0,3)$

$e = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \Rightarrow e = \frac{2.65}{9} < 1$ الأختلاف المركزي

ثالثاً:- القطع الزائد

هو مجموعة من النقط في المستوي التي تكون فرق بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) عدد ثابت.

القطع الزائد بؤرتاه تنتمي لمحور الصادات	القطع الزائد بؤرتاه تنتمي لمحور السينات
بؤرتاه هما $F_1(0,c), F_2(0,-c)$	بؤرتاه هما $F_1(c,0), F_2(-c,0)$
الرأسان هما $v_1(0,a), v_2(0,-a)$	الرأسان هما $v_1(a,0), v_2(-a,0)$
القطبان هما $(b,0), (-b,0)$	القطبان هما $(0,b), (0,-b)$
معادلة القطع $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	معادلة القطع $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
$2c$تمثل البعد بين البؤرتين $2a$طول المحور الحقيقي $2b$طول التخيلي (المرافق)	
$c^2 = a^2 + b^2 \quad ; \quad c,a,b > 0$	

1 المحور الذي يحوي البؤرتين يسمى المحور الحقيقي ويكون طوله $2a$.

2 المحور الذي لا يحوي البؤرتين يسمى المحور التخيلي أو المرافق ويكون طوله $2b$.

3 إذا كان معامل x^2 موجبا فأن البؤرة تقع على المحور السينات.

4 إذا كان معامل y^2 موجبا فأن البؤرة تقع على المحور الصادات.

5 ليس من الضروري أن تكون قيمة a أكبر من قيمة b .

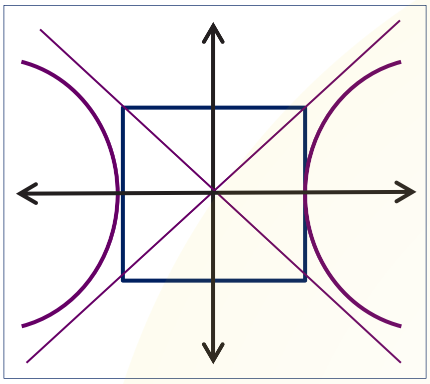
ملاحظـــــــة

تسمى النسبة $\frac{c}{a}$ بالأختلاف المركزي , أي ان $e = \frac{c}{a}$ وتكون أكبر من الواحد في القطع الزائد.

مثـــال:

عين البؤرتين والرأسين وطول كل من المحورين الحقيقي والمرافق للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ ثم أرسمه

جـ:



بالمقارنة بالمعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

طول المحور الحقيقي $a^2 = 64 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow 2a = 16$

طول المحور المرافق $b^2 = 36 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow 2b = 12$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 64 + 36 \Rightarrow c^2 = 100$

البؤرتان هي $c = 10 \Rightarrow F_1(10\,,0)\,, F_2(-10\,,0)$

الرأسان هما $V_1(8\,,0)\,, V_2(-8\,,0)$ قطبا القطع الزائد $M_1(0\,,6)\,, M_2(0\,,-6)$

مثـــال:

عين البؤرتين والرأسين وطول كل من المحورين الحقيقي والمرافق للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ ؟

جـ:

$a^2 = 64 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow 2a = 16$ طول محور الحقيقي

$b^2 = 36 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow 2b = 12$ طول محور التخيلي

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow c = 10$

$F_1(10\,,0)\,, F_2(-10\,,0)$ البؤرتان هي

$M_1(0\,,6)\,, M_2(0\,,-6)$ قطبا القطع الزائد $V_1(8\,,0)\,, V_2(-8\,,0)$ الرأسان هما

مثـــال:

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هي بؤرتي القطع الناقص $\frac{y^2}{20} + \frac{x^2}{36} = 1$, وأحد رأسيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x =$

جـ:

القطع الكافئ $y^2 = -8x \Rightarrow 4p = 8 \Rightarrow p = 2$

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 36 - 20 \Rightarrow c^2 = 16$

بالنسبة للقطع الزائد

$\because\ a_+ = p \Rightarrow \therefore a = 2 \Rightarrow a^2 = 4$

$\because\ c_+ = c_- \Rightarrow \therefore c = 4 \Rightarrow c^2 = 16$

$\because\ c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \therefore 16 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16 - 4 \Rightarrow b^2 = 12$

معادلة القطع الزائد هي $\boxed{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1}$

النسبة بين البعد بين البؤرتين والمحور الحقيقي $\frac{\propto}{\beta}$ فهذا يعني يجب الحل بالأحتمالين الأحتمال الأول $\frac{\propto}{\beta} = \frac{2b}{2a}$ والأحتمال الثاني $\frac{\propto}{\beta} = \frac{2a}{2b}$ ثم نكمل

مثـــال:

جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه $V_1(3,0)$ $V_2(-3,0)$, والنسبة بين طولي محوريه تساوي $\frac{1}{3}$ ؟

جـ:

الأحتمال الأول

$\frac{\text{المحور الحقيقي}}{\text{المحور المرافق}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2a}{2b} = \frac{1}{3} \Rightarrow b = 3a \Rightarrow b = (3)(3) \Rightarrow b = 9$

معادلة القطع الزائد هي $\boxed{\therefore \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{81} = 1}$

الأحتمال الثاني

$\frac{\text{المحور المرافق}}{\text{المحور الحقيقي}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2b}{2a} = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{a}{3} \Rightarrow b = \frac{3}{3} \Rightarrow b = 1$

معادلة القطع الزائد هي $\boxed{\therefore \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1}$

مثـــال:

جد معادلة القطع الناقص الذي مساحته 20π وحدة مربعة وأحدى بؤرتيه هى بؤرة القطع الزائد $5x^2 - 4y^2 = 20$ ؟

جـ:

بالنسبة للقطع الزائد نقسم طرفي المعادلة $5x^2 - 4y^2 = 20$ على 20 نحصل على

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \Rightarrow a^2 = 4 , b^2 = 5$$
$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 5 = 9 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow c^2 = 9$$

∵ أحد بؤرتي القطع الناقص هي بؤرة القطع الزائد فتكون $c = 3 \Rightarrow c^2 = 9$ للناقص

بالنسبة للقطع الناقص

$$A = ab\pi \Rightarrow ab\pi = 20\pi \Rightarrow a = \frac{20\pi}{b\pi} \Rightarrow a^2 = \frac{400}{b^2} \ldots\ldots(1)$$
$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 9 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

وبتعويض (1) في (2) ينتج $\frac{400}{b^2} - b^2 = 9$ نضرب الطرفين في b^2 ينتج

$$400 - b^4 = 9\, b^2 \Rightarrow b^4 + 9\, b^2 - 400 = 0$$
$$(b^2 - 16)(b^2 + 25) = 0 \Rightarrow$$
$$either\ (b^2 - 16) = 0 \Rightarrow b^2 = 16 \quad or\ (b^2 + 25) = 0$$ يهمل
$$a^2 = \frac{400}{b^2} \Rightarrow a = a^2 = \frac{400}{16}$$
$$a^2 = 25 \quad and \quad b^2 = 16$$

معادلة القطع الناقص هي $\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$

مثـــال:

عين النقاط على القطع الزائد $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$ والتي تبعد عن البؤرة في الفرع الأيمن للقطع الزائد بمقدار $\frac{1}{\sqrt{3}}$

جـ:

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow a^2 = 3 , \quad b^2 = 1$$
$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow F_1(2, 0), \quad F_2(-2, 0)$$

∵ $p(x, y)$ تنتمي للقطع فأنها تحقق المعادلة $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$ نضرب الطرفين في (3)

$$x^2 - 3y^2 = 3 \Rightarrow 3y^2 = x^2 - 3 \ldots\ldots\ldots(1)$$
$$\overline{pF_1} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ تربيع الطرفين
$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow 3(x-2)^2 + 3(y-0)^2 = 1$$
$$3x^2 - 12x + 12 + 3y^2 = 1 \ldots\ldots(2)$$

وبتعويض معادلة (1) في معادلة (2) ينتج

$$3x^2 - 12x + 12 + x^2 - 3 = 1 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 8 = 0$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) = 0$$
$$either\ (x-2) = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \therefore 3y^2 = (2)^2 - 3$$
$$y^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \left(2, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(2, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

ولكن عند التعويض الأحتمال الثاني $(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$ يكون $\{y \notin R\}$ فيهمل

مثـــال:

قطع الزائد معادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ محوره الحقيقي $6\sqrt{2}$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمة كل من h , k

جـ:

بالنسبة للقطع الناقص: نقسم المعادلة $9x^2 - 16y^2 = 576$ على 576 نحصل على:-

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1 \Rightarrow a^2 = 64 ; \ b^2 = 36$$
$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 64 - 36 \Rightarrow c^2 = 28$$

بالنسبة للقطع الزائد

$$\because 2a = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2} \Rightarrow \therefore a^2 = 18$$

∵ بؤرتا القطع الزائد هي بؤرتي القطع الناقص ∴ للزائد $c^2 = 28$ هي نفسها للناقص

$$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \therefore 28 = 18 + b^2 \Rightarrow b^2 = 28 - 18 \Rightarrow b^2 = 10$$
$$\therefore \left(\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1\right) \times 90 \Rightarrow 5x^2 - 9y^2 = 90$$ معادلة القطع الزائد هي
$$\because hx^2 - ky^2 = 90 \Rightarrow \boxed{\therefore h = 5} \Rightarrow \boxed{\therefore k = 9}$$

مثـــال:

لنقطة $p(6, L)$ تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومعادلة هي $x^2 - 3y^2 = 12$ فجد:

(1) قيمة L (2) طولى نصف القطر البؤري للقطع المرسوم فى الجهة اليمنى من p ؟

جـ:

(1) p تنتمي للقطع فظانها تحقق معادلته

$$(1) \quad x^2 - 3y^2 = 12 \Rightarrow (6)^2 - 3(k)^2 = 12 \Rightarrow 3k^2 = 36 - 12$$

$k^2 = \frac{24}{3} \Rightarrow k^2 = 8 \Rightarrow k = \pm 2\sqrt{2}$

$k = 2\sqrt{2}$ نأخذ $\Rightarrow p(6, 2\sqrt{2})$

$(2)\ \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = 12 \quad, b^2 = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

البؤرتان هي $F_1(4, 0), F_2(-4, 0)$

طول نصف قطر البؤري

$\overline{pF_1} = \sqrt{(6-4)^2 + (2\sqrt{2} - 0)^2} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

أختبـــــر نفسك في الأسئلة الوزاريـــــة

[2014/2011]	جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2 + 12y = 0$	$\left[Ans:\ \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1\right]$
[2013]	جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه ببؤرتي القطع الزائد $x^2 - 3y^2 = 12$ والنسبة بين طولي محوري القطع الناقص $= \frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الأصل؟	$\left[Ans:\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1\right]$
[2014/2013]	قطع زائد طول محوره الحقيقي 6 وحدات وأحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(1, 2\sqrt{5}), (1, -2\sqrt{5})$, جد معادلتي القطع المكافئ الذي مركزه نقطة الأصل والقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ؟	$\left[Ans:\ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1\right]$
2015 / 2020	أكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه في نقطة الأصل الذي أحد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 9 , 1 وحدات على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين؟	$\left[Ans:\ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1\right]$
[2016]	جد معادلة قطع مخروطي مركزه في نقطة الأصل وينطبق محوراه على المحورين الأحداثيين وأختلافه المركزي $= 3$ ويمر بالنقطة $(0, 2)$ ؟	$\left[Ans:\ \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1\right]$
[2016]	جد معادلة القطع الناقص والزائد أذا كان كل منهما يمر ببؤرة الأخر وكلتاهما تقعان على المحور السيني وطول المحور الكبير يساوي $6\sqrt{2}m$ وطول المحور الحقيقي يساوي $6m$ ؟	$\left[\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1, \quad \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9}\right]$
[2016]	جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد $8y^2 - x^2 = 32$ ويمس دليل القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0$	$\left[Ans:\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{52} = 1\right]$
[2016]	قطع مكافئ معادلته $x^2 = 10y - 3ky$ ومعادلة دليله $y = 2k$ جد قيمة k ومعادلة القطع الزائد الذي أحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ أعلاه وطول محوره المرافق يساوي (2) وحدة طول	$\left[Ans:\ \frac{y^2}{15} - \frac{x^2}{1} = 1\right]$
[2017 ط2]	جد معادلة القطع وبؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ وأحد رأسيه هو بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$	
[2018 ط2]	قطع الزائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته $hx^2 - 4y^2 = L$ وطول محوره التخيلي $2\sqrt{5}$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $4x^2 + 13y^2 = 52$ جد قيمة كل من $h, L \in R$ ؟	
[2021 ط1]	F_1بؤرة القطع المكافئ $F_2x^2 + 24y = 0$, هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 = 32x$ جد معادلة القطع الزائد الذي أحدى بؤرتيه (F_2) وطول محوره المرافق يساوي طول $(\overline{F_1F_2})$	
[2018ج3]	جد معادلة القطع الزائد الذي أحدى بؤرتيه هي مركز الدائرة $x^2 + y^2 - 16y + 15 = 0$ ونصف طول محوره المرافق يساوي نصف قطر تلك الدائرة ؟	
[2021ط ت]	جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على المحور الصادات وطول محوره المرافق $(2\sqrt{2})$ وأختلافه المركزي (3)	
[2022ح1]	جد معادلة القطع زائد الذي مركزه نقطة الأصل والذي بؤرتاه تنتمي الى المحور الصادات ويمر بالنقطتين $(-3, 6), (1, \sqrt{20})$؟.	

أنسحاب المحاور للقطع الزائد

مثـــال:

جد أحداثيات المركز والرأسين والأختلاف المركزي والبؤرتين في القطع الزائد الذي معادلته $16(x+2)^2-9(y-3)^2=144$

جـ:

نجعل المعادلة $16(x-2)^2-9(y-3)^2=144$ بالصيغة القياسية بقسمة طرفيها على144

$$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{16}=1$$

وبالمقارنة مع المعادلة القياسية

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

نجد أن مركز القطع هو $\overline{O}\,(2,3)=(h,k)$

$a^2=9 \;\Rightarrow\; a=3$

$2a=6$ طول المحور الحقيقي

$y=k \;\Rightarrow\; y=3$ معادلة المحور الحقيقي

$b^2=16 \;\Rightarrow\; b=4$

$2b=8$ طول المحور المرافق

$x=h \;\Rightarrow\; x=2$ معادلة المحور المرافق

$\because c^2=a^2+b^2 \Rightarrow \therefore c^2=9+16$

$c^2=25 \Rightarrow c=5$

$\therefore$ البؤرتان هما

$\because \overline{F}(\,h\mp c,k) \Rightarrow \overline{F}(2\mp 5,3)$

$\therefore\; \overline{F_1}(7,3)\;,\; \overline{F_2}(-3,3)$

$\therefore$ الرأسان هما

$\because \overline{V}(\,h\mp a,k) \Rightarrow \overline{V}(2\mp 3,3)$

$\overline{V_1}(5\,,3) \Rightarrow \overline{V_2}(-1\,,3)$

$e=\frac{c}{a} \Rightarrow e=\frac{5}{3}$

$\frac{5}{3}>1$ الأختلاف المركزي

مثـــال:

عين كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والأختلاف المركزي للقطوع الزائدة الأتية :-

جـ:

$c)\; 2(y+1)^2-4(x-1)^2=8$

$$\frac{(y+1)^2}{4}-\frac{(x-1)^2}{2}=1$$

وبالمقارنة مع المعادلة القياسية

$$\frac{(y-h)^2}{a^2}-\frac{(x-k)^2}{b^2}=1$$

نجد أن مركز القطع هو $\overline{O}\,(-1,1)=(h,k)$

$a^2=4 \;\Rightarrow\; a=2$

$2a=4$ طول المحور الحقيقي

$x=h \;\Rightarrow\; x=-1$ معادلة المحور الحقيقي

$b^2=2 \;\Rightarrow\; b=\sqrt{2}$

$2b=2\sqrt{2}$ طول المحور المرافق

$y=k \;\Rightarrow\; y=1$ معادلة المحور المرافق

$\because c^2=a^2+b^2 \Rightarrow \therefore c^2=4+2$

$c^2=6 \Rightarrow c=\sqrt{6}$

$\therefore$ البؤرتان هما

$\because \overline{F}(\,h,k\mp c) \Rightarrow \overline{F}(-1,1\mp 5)$

$\therefore\; \overline{F_1}(-1,6)\;,\; \overline{F_2}(-1,-4)$

$\therefore$ الرأسان هما

$\because \overline{V}(\,h,k\mp a) \Rightarrow \overline{V}(-1,1\mp 3)$

$\overline{V_1}(-1\,,4) \Rightarrow \overline{V_2}(-1\,,-2)$

$e=\frac{c}{a} \Rightarrow e=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\frac{\sqrt{6}}{2}>1$ الأختلاف المركزي

ملاحظـــــــــــــة

في المثال التالي وجميع الأسئلة المشابهة له دائماً يكون الحل بأكمال المربع بالنسبة للمتغيرين وبعد ذلك نقوم بالتحليل الحدوديتين كل منها بالمربع الكامل ثم نقسم على العدد الباقي للطرفين فنحصل على المعادلة القياسية للقطع الزائد.

مثـــال:

في القطع الزائد $4y^2-9x^2+36x-8y-68=0$ جد مركز القطع وطول المحورين والبؤرتين

جـ:

$4y^2-8y-9x^2+36x=68$

$4(y^2-2y)-9(x^2+4x)=68$

$4(y^2-2y+1-1)-9(x^2-4x+4-4)=68$ قمنا بأكمال المربع

$4(y^2-2y+1)-(4\times 1)-9(x^2-4x+4)+(9\times 4)=68$

$4(y-1)^2-4-9(x-2)^2+36=68$

$$4(y-1)^2 - 9(x-2)^2 = 36 \quad \div 36$$

$$\frac{4(y-1)^2}{36} - \frac{9(x-2)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\therefore \frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$$ المعادلة القياسية

$\overline{O}(h,k) = \overline{O}(2,1)$ مركز القطع

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow 2a = 6$ طول المحور الحقيقي

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow 2b = 4$ طول المحور التخيلي

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 4 \Rightarrow c^2 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$

$\because F_1(h, k+c) \Rightarrow \therefore F_1(2, 1+\sqrt{13})$ $\therefore$ البؤرتان هما

$\because F_2(h, k-c) \Rightarrow \therefore F_2(2, 1-\sqrt{13})$

$\because V_1(h, k+a) \Rightarrow \therefore V_1(2, 1+3) \Rightarrow V_1(2, 4)$ $\therefore$ الرأسان هما

$\because V_2(h, k-a) \Rightarrow \therefore V_2(2, 1-3) \Rightarrow V_2(2, -2)$

$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{5}{3} > 1$ الأختلاف المركزي

الفصل الثالث تطبيقات التفاضل

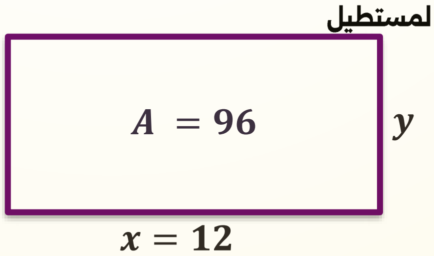
مثـــال:

صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها $96\ cm^2$ يتمدد طولها بمعدل $2cm/s$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة ، جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها $8\ cm$.

جـ:

$A = 96$ مساحة المستطيل وأن $x =$ طول المستطيل وأن $y =$ نفرض أن عرض المستطيل

يجب أن نجد قيمة y أولا من قانون مساحة المستطيل



$\frac{dx}{dt} = 2, \frac{dy}{dt} = ?$

$A = 96$ ثابت

$x = ?, y = 8$

$A = x\,y$

$96 = 8x \Rightarrow x = 12$

$x\,y = 96$

$(x)\left(\frac{dy}{dt}\right) + (y)\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$

$12\frac{dy}{dt} + (8)(2) = 0 \Rightarrow 12\frac{dy}{dt} = -16$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{4}{3} cm/s$ معدل العرض

مثـــال:

مكعب صلد طول حرفه $8\ cm$ مغطى بطبقة من الجليد بحيث يحافظ على شكله مكعبا ، فاذا بدأ الجليد يذوب بمعدل $6\ cm^3/s$ فجد معدل النقصان فى سمك الجليد فى اللحظة التى يكون فيها سمك الجليد $1\ cm$

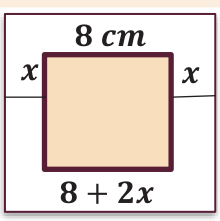
جـ:

نفرض أن سمك الجليد هو x وأن حجم الجليد $= v$ = حجم المكعب

طول ضلع المكعب دون الجليد $= 8$

طول ضلع مع الجليد $= (8 + 2x)$

حجم الجليد = حجم المكعب مع الجليد – حجم المكعب الصغير دون الجليد



$v = v_{\text{مع الجليد}} - v_{\text{دون الجليد}} \Rightarrow v\,(8 + 2x)^3 - (8)^3$

$\frac{dv}{dt} = 3(8 + 2x)^2 \times (2)\frac{dx}{dt} - 0 \Rightarrow -6 = 3(8 + 2x)^2 \times (2)\frac{dx}{dt}$

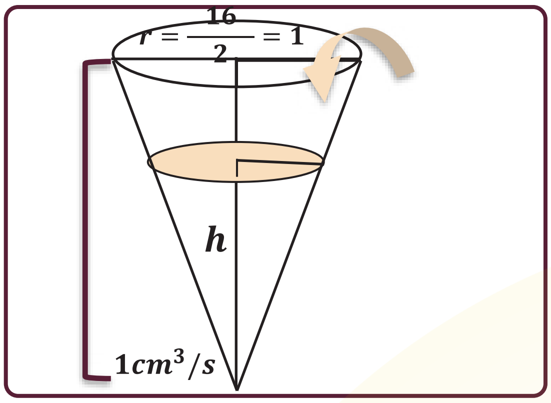
$\frac{dx}{dt} = \frac{-6}{600} = -\frac{1}{100} cm/s \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -0.01$ cm/s

معدل نقصان سمك الجليد 0.01 cm/s

: مثـــال

مرشح مخروطي قاعدته أفقية ورأسه للأسفل ارتفاعه يساوي $24\ cm$ وطول قطر قاعدته $16\ cm$ يصب فيه سائل بمعدل $5\ cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل بمعدل $1\ cm^3/s$ جد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون عمق السائل $12\ cm$.

: جـ



$5cm^3/s$

r

نفرض أرتفاع السائل في المخروط h

ونصف قطر المخروط السائل r وحجم السائل v

حجم المخروط $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

من الشكل المجاور نجد علاقة بين h , r من خلال تشابه المثلثين

$$\frac{r}{8} = \frac{h}{24} \Rightarrow r = \frac{8}{24}h \Rightarrow r = \frac{1}{3}h \ldots\ldots(1)$$

$$v = \frac{1}{3}\pi r2\, h \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

نعوض (1) في (2)

$$v = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{3}h\right)^2 h \Rightarrow v = \frac{1}{27}\pi h^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{27}\pi\, 3h^2 \frac{dh}{dt}$$ نشتق العلاقة بالنسبة للزمن t

معدل تغير حجم السائل = معدل الصب − معدل التسرب $\left(\frac{dv}{dt} = 5 - 1 = 4\, cm^3/s\right)$

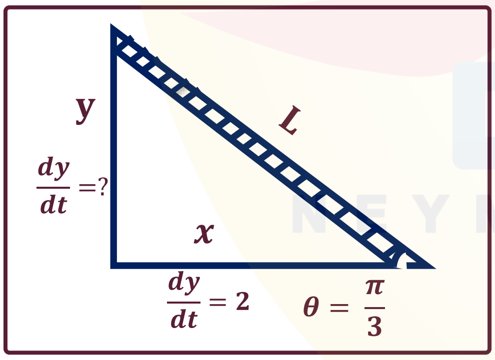
$$4 = \frac{1}{9}\pi(12)^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow 4 = \frac{144\pi}{9}\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{36}{144\pi} = \frac{1}{4\pi}\ cm/s$$

معدل تغير ارتفاع السائل $\frac{1}{4\pi}\ cm/s$

: سؤال 1

سلم يستند بطرفه العلوي على حائط شاقولي وبطرفه السفلي على أرض افقية فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل $2\ m/sec$ فجد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي $\frac{\pi}{3}$.

: جـ



نفرض بعد قاعدة السلم عن الحائط x

، بعد رأس السلم عن الارض y وطول السلم L

حسب مبرهنة فيثاغورس (لاحظ طول السلم ثابت)

نجد علاقة بين x, y من خلال الـ $(\tan\theta)$

لاحـــــظ :

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{y}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \sqrt{3}\,x$$

$$x^2 + y^2 = L^2 \ldots\ldots (1)$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$ نشتق العلاقة (1)

$$\left(2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0\right) \div 2 \Rightarrow x\frac{dx}{dt} + \sqrt{3}\,x\frac{dy}{dt} = 0$$

$$x\left(\frac{dx}{dt} + \sqrt{3}\frac{dy}{dt}\right) \Rightarrow either\quad x = 0$$ يهمل

$$or\quad \frac{dx}{dt} + \sqrt{3}\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 2 + \sqrt{3}\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\frac{dy}{dt} = -2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$ معدل أنزلاق الطرف العلوي

أختبـــــر نفسك في الأسئلة الوزاريـــــة

[2009]	طريقان متعامدان تسير سيارة على الطريق الأول بسرعة $(80\ km/h)$ وتسير سيارة على الطريق الأخر بسرعة $(60\ km/h)$ جد معدل أبتعاد السيارتين بعد مرور ربع ساعة.	$[\ Ans: 100\ km/h]$
[2011/2014]	سلم طوله $(10\ m)$ يستند طرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على أرض أفقية فأذا كان أنزلاق الطرف السفلي مبتعداً عن الحائطة بمعدل $(2m/sec)$ عندما يكون الطرف الأسفل على بعد $(8\ m)$ من الحائط جد: 1)معدل أنزلاق الطرف العلوي. 2) سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض.	$\left[\begin{array}{l} Ans: 1) -8/3\ m/s \\ 2) -1/3\ \ rad/s \end{array}\right]$
[ق.خ 2ح 2017]	مصدر ضوئي موضوع على الأرض يبعد $(20\ m)$ عن حائط , تسيرحادلة أرتفاعها $(1.6\ m)$ بأتجاه الحائط بسرعة $(2.5\ m/s)$ فما مقدار التغير في أرتفاع ظل الحادلة على الحائط عندما تكون على بعد $(8\ m)$ من الحائط ؟ وهل أرتفاع الظل يزداد أم يتناقص .	$\left[Ans: \frac{-5}{9}\right]$
[2014]	جد نقطة أو أكثر تنتمي الى الدائرة $(x^2+y^2+4x-8y=108)$ عندها يكون معدل تغير x بالنسبة للزمن مساوياً الى معدل تغير y بالنسبة للزمن	$[\ Ans: \{(6\,,-4)(-10\,,12)\}\ ]$
[2014]	جد نقطة أو أكثر تنتمي الى الدائرة $(x^2+y^2+4x-8y=108)$ عندها يكون معدل تغير x بالنسبة للزمن مساوياً الى معدل تغير y بالنسبة للزمن	$[\ Ans: \{(6\,,-4)(-10\,,12)\}\ ]$
[1ط 2012/2021/ 2015]	عمود طوله $(7.2m)$ في نهايته مصباح , يتحرك رجل طوله $(1.8m)$ مبتعدا عن العمود وبسرعة $(30m/min)$ جد معدل تغير طول ظل الرجل.	$[\ Ans: 10\ m/min]$
[1ح 2017]	لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $(y^2=4x)$ بحيث يكون معدل أبتعادها عن النقطة $(7,0)$ يساوي $(0.2\ \ unit/s)$ جد المعدل الزمني لتغير الأحداثي السيني للنقطة M عندما $x=4$	
[2ح 2017]	متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل, يزداد طول ضلعه بمعدل $(2\ cm/s)$ بحيث يبقى الحجم ثابت دائما $(640c\ m^3)$, جد معدل التغير بالأرتفاع في اللحظة التي يكون فيها الأرتفاع $(10\ cm)$	
[2ط 2017]	أسطوانة دائرية قائمة يصب فيها ماء بمعدل تغير زمني في أرتفاع الماء $(40\ m/s)$ جد معدل تغير حجم الماء إذا كان نصف قطر قاعدة الأسطوانة $(10\ cm)$.	
[3ح 2017]	وقف صقر على قمة شجرة أرتفاعها $(30\ m)$ لاحظ على الأرض أرنب فطار نحوه بسرعة $(80\ m/s)$ جد معدل تغير موقع الأرنب أذا كان بعده عن الشجرة $(40\ m)$	
[2012/ 2014/2020]	لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $(x^2=y)$ جد أحداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لأبتعادها عن النقطة $\left(0\ ,\ \frac{3}{2}\right)$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الأحداثي الصادي للنقطة M .	$[\ Ans: \{(\sqrt{2}\,,2)(-\sqrt{2}\,,2)\}\ ]$
[2ط 3/2022ح 2019]	متوازي سطوح مستطيلة أبعاده تتغير بحيث تبقى القاعدة مربعة الشكل يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل $(0.3\ \ cm/s)$ والأرتفاع بمعدل $(0.5\ \ cm/s)$ جد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة $(4\ cm)$ والأرتفاع $(3\ cm)$.	
[2ح 2020]	متوازي سطوح مستطيلة القاعدة مربعة الشكل يتغير الأرتفاع بمعدل $(0.5\ \ cm/s)$ بحيث يظل الحجم ثابت دائما $(320\ cm^3)$ وعندما يكون الأرتفاع $(5\ cm)$ جد معدل تغير طول القاعدة	

مبرهنة رول والقيمة المتوسطة

سؤال 6 :2 /2014

بين ان كل من الدوال التالية تحقق مبرهنة رول على الفترة المعطاة ازاء كل منها ثم جد قيمة c .

$b)\ h(x) = x^3 - x \quad , \quad [-1,1]$

جـ :

1) الـدالـة مستمـرة علـى الفتـرة المغلقـة $[-1,1]$ لانهـا كثيـرة حـدود.

2) الـدالـة قابلـة للاشتقاق علـى الفتـرة المفتوحة $(-1,1)$ لانهـا كثيـرة حـدود.

3) $h(a) = h(-1) = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$

$h(b) = h(1) = (1)^3 - (1) = 1 - 1 = 0$

$h'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow h'(c) = 3c^2 - 1 \quad , \quad \because h'(c) = 0$

$3c^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3c^2 = 1 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \therefore c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1,1)$

$d)\ f(x) = \cos 2x + 2\cos x \quad , \quad [0,2\pi]$

1) الـدالـة مستمـرة علـى الفتـرة المغلقـة $[0,2\pi]$ لانها من الدوال الدائرية.

2) الـدالـة قابلـة للاشتقاق عى الفتـرة المفتـوحة $(0,2\pi)$ لانها من الدوال الدائرية.

3) $f(a) = f(0) = \cos 2(0) + 2\cos(0) = 1 + 2(1) = 3$, $f(b) = f(2\pi) = \cos 2(2\pi) + 2\cos(2\pi) = 1 + 2(1) = 3$

$\therefore f(a) = f(b)$

$\therefore$ الـدالـة تحقق شروط رول (نشتـق الـدالـة) $f'(x) = -2\sin 2x - 2\sin x$

$f'(c) = -2\sin 2c - 2\sin c \Rightarrow f'(c) = 0$

$-2\sin 2c - 2\sin c = 0 \quad \div(-2) \Rightarrow \sin 2c + \sin c = 0$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$2\sin c\cos c + \sin c = 0$

$\sin c\,[2\cos c + 1] = 0 \Rightarrow$ either $\sin c = 0 \Rightarrow c = 0, \pi, 2\pi$

الزاوية c في الربع الثاني والثالث

or $2\cos c + 1 = 0 \Rightarrow \cos c = \frac{-1}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{3}$

زاوية الأسناد هي $c = \frac{\pi}{3}$ ولتحويلها الى الربع الثاني والثالث تكون $c = \frac{2\pi}{3}$ و $c = \frac{4\pi}{3}$

$\therefore c = \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \in (0,2\pi)$

مثـال :

$f(x) = ax^2 - 4x + 5$ دالة تحقق مبرهنة رول على الفترة $[-1,b]$ فأذا كانت $c = 2c \in (-1,b)$, فجد قيمتي $a,b \in R$

جـ :

$\because$ الدالة تحقق مبرهنة رول $\Leftarrow$ $\therefore f(a) = f(b)$ and $f'(c) = 0, c = 2,\ f'(2) = 0$

$f'(x) = 2ax - 4 \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow 2a(2) - 4 = 0 \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$

$f(a) = f(b) \Rightarrow f(-1) = f(b) \Rightarrow (-1)^2 - 4(-1) + 5 = b^2 - 4b + 5$

$b^2 - 4b + 5 = 10 \Rightarrow b^2 - 4b - 5 = 0 \Rightarrow (b-5)(b+1) = 0$

either $b - 5 = 0 \Rightarrow b = 5$ or $b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$ تهمل

$\therefore a = 1 \quad , \quad b = 5$

مبرهنة القيمة المتوسطة

سـؤال7 :

اختبر امكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة للدوال التالية على الفترة المعطاة ازاءها مع ذكر السبب وان تحققت المبرهنة جد قيم C الممكنة.

$c)\ g(x) = \frac{4}{x+2} \quad , \quad [-1,2]$

جـ :

1) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1,2]$ لانها غير مستمرة عند $(x = -2)$ فقط .

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,2)$ لانها غير قابلة للاشتقاق عند $(x = -2)$ فقط.

الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة

$g(x) = \frac{4}{x+2} = 4(x+2)^{-1} \Rightarrow f'(x) = -4(x+2)^{-2} = \frac{-4}{(x+2)^2}$

3) $g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \Rightarrow \frac{-4}{(c+2)^2} = \frac{g(2) - g(-1)}{2 - (-1)}$

$\frac{-4}{(c+2)^2} = \frac{\frac{4}{2+2} - \frac{4}{-1+2}}{2+1} \Rightarrow \frac{-4}{(c+2)^2} = \frac{1-4}{3}$

$\frac{-4}{(c+2)^2} = \frac{-3}{3} \Rightarrow \frac{4}{(c+2)^2} = \frac{1}{1} \Rightarrow (c+2)^2 = 4$

$c + 2 = \pm 2 \Rightarrow$ either $c + 2 = 2 \Rightarrow \therefore c = 0 \in (-1,2)$

or $c + 2 = -2 \Rightarrow c = -4 \notin (-1,2)$

$d)\ B(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} \quad , \quad [-2,7]$

1) الـدالـة مستمـرة علـى الفتـرة المغلقـة $[-2,7]$ لكونهـا جـذر تكعيبي.

2) الـدالـة غير قابلـة للاشتقاق عنـد $x = -1$ لان $-1 \in (-2, 7)$
لاحظ تكون المشتقة $B'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$ غير معرفة عندما $x = -1$
∴ الـدالـة لا تحقق شـروط مبـرهنـة القيـمـة المتـوسطـة.

أختبـــــر نفسك في الأسئلة الوزاريـــــة

[2011]	بين أن الدالة $f(x) = (x-1)^4$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $x \in [-1, 3]$ ثم جد قيمة c	$[Ans: \ c = 1]$
[2012]	أبحث مبرهنة رول للدالة التالية $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$; $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$ وأن تحققت جد قيمة c	$[Ans: \ c = 1]$
[2013]	بأستخدام مبرهنة رول جد قيمة c للدالة $f(x) = x^4 + 2x^2$ حيث $x \in [-2, 2]$	$[Ans: \ c = 0]$
[2015]	برهن أن الدالة $f(x) = x^2 - 6x + 4$ تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة وجد قيمة c عند الفترة $[-1, 7]$	$[Ans: \ c = 3]$
[2016]	$f(x) = x^3 - 4x^2$ حيث $f: [0, n] \to R$ وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عندما $c = \frac{2}{3}$ فجد قيمة n	$[Ans: \ n = 2]$
[2017 ج3]	إذا كانت $f(x) = x^2 - 2x$ وكانت $f: [0, n] \to R$ وتحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عندما $c = 5$ فجد قيمة n	
[2018 ط1]	إذا كانت $f(x) = ax^2 - 6x + 4$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $[0, k]$ وأن $f(-1) = 11$ فجد قيمتي $a, k \in R$ ثم جد قيمة c على تلك الفترة	
[2018 ط2]	إذا كانت $f(x) = x^2 - ax + 4$ دالة تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[-1, b]$ فأذا كانت $c = 3$, $c \in (-1, b)$ فجد قيمتي $a, b \in R$	

التقريب بأستخدام القيمة المتوسطة

ملاحظـــــــات

1. نجد القيمة التقريبية بأستخدام القانون : $f(b) = f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$
2. دائما قيمة الـ (b) تكون من السؤال وقيمة الـ (a) من الطالب في أغلب الأحيان وقيمة الـ (h) هي $(h = b - a)$
3. يسمى المقدار $hf'(a)$ مقدار التغير التقريبي

ملاحظـــــــات

نستخدم مقدار التغير التقريبي في الحالات الأتية :-
1. إذاطلب في السؤال بشكل مباشر أي (جد مقدار التغير التقريبي ......)
2. إذا طلب في السؤال أيجاد – حجم الطلاء – حجم الجليد المغطى – حجم الخشب المستخدم لصناعة اي شكل مجوف – حجم المادة المستخدمة لصنع اي شكل مجوف

سوف نقسم المادة الى خمسة أقسام :- أولاً :- أيجاد الجذور بصورة تقريبية

مثـــال :

بـأستخدام نتيجة مبـرهـنـة القيـمـة المتوسطة جد بصورة تقريبية ومقرباً لثلاث مراتب عشرية على الاقل كـلاً من :

جـ :

c) $\sqrt{17} + \sqrt[4]{17}$

$$\begin{aligned} b &= 17 \\ a &= 16 \\ \hline h &= 1 \end{aligned}$$

∴ الدالة هي $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}$

$f(a) = f(16) = \sqrt{16} + \sqrt[4]{16} = 4 + 2 = 6$

$f(x) = (x)^{\frac{1}{2}} + (x)^{\frac{1}{4}}$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{4} x^{\frac{-3}{4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

$f'(a) = f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{(16)^3}} \Rightarrow f'(8) = \frac{1}{2\sqrt{16}} + \frac{1}{4(\sqrt[4]{16})^3}$

$f'(16) = \frac{1}{(8)} + \frac{1}{4(8)} = \frac{4+1}{4(8)} = \frac{5}{32} = 0.156$

$f'(a) = f'(16) = 0.156$

$\because f(b) \cong f(a) + h f'(a)$

$\therefore \sqrt{16} + \sqrt[4]{16} \cong 6 + (1)(0.156) \cong 6 + 0.156 \cong 6.156$

$d)\ \sqrt[3]{0.12} \Rightarrow \sqrt[3]{0.120}$ لاحظ عدد المراتب ودليل الجذر

$b = 0.120$
$a = 0.125$
$h = -0.005$

∴ الدالة هي $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(a) = f(0.125) = \sqrt[3]{0.125} = 0.5$

$f(x) = f(x) = (x)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(a) = f'(0.125) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(0.125)^2}} \Rightarrow f'(125) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{0.125})^2} = \frac{1}{3(0.5)^2}$

$f'(a) = f'(0.125) = \frac{1}{0.75} = \frac{100}{75} = \frac{4}{3} = 1.333$

$\because f(b) \cong f(a) + h f'(a)$

$\therefore \sqrt[3]{0.12} \cong 0.5 + (-0.005)(0.333) \cong 0.5 - 0.006665$ $\quad \therefore \sqrt[3]{0.12} \cong 0.493335$

ثانيا : - أيجاد مقدار التغير التقريبي

مثــال :

يراد طلاء مكعب طول ضلعه $10\ cm$ فاذا كان سمك الطلاء $0.15\ cm$ أوجد حجم الطلاء بصورة تقريبية وباستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

جـ :

لاحظ المطلوب حجم الطلاء أي يجب أيجاد مقدار التغير التقريبي

نفرض أن حجم المكعب هو v وطول ضلعه هو x فيكون الحجم $v(x) = x^3$

لاحظ مقدار الزيادة في طول الضلع 0.15

من الجهتين فتكون زيادة طول الضلع هي 0.3

$b = 10.3$
$a = 10$
$h = 0.3$

$v(x) = x^3 \Rightarrow v'(x) = 3x^2$

$v'(a) = v'(10) = 3(10)^2 \Rightarrow v'(8) = 300$

$\therefore h\, v'(a) \cong (0.3)(300) \cong 90\ cm^3$ حجم الطلاء بصورة تقريبية هو

ثالثا : - أعطاء الدالة $f(x)$ في السؤال ويطلب أيجاد $f(b)$ بصورة تقريبية

مثــال :

اذا كانت $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ جـد بصورة تقريبية $f(1.001)$.

جـ :

$b = 1.001$
$a = 1$
$h = 0.001$

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$

$f(a) = f(1) = 1 + 3 + 4 + 5 = 13$

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 4 \Rightarrow f'(a) = f'(1) = 3 + 6 + 4 = 13$

$\because f(a+h) = f(b) \cong f(a) + h f'(a)$

$\therefore f(1.001) \cong 13 + (0.001)(13) \cong 13 + 0.013 \cong 13.013$

رابعا : - أيجاد الحجوم بصورة تقريبية

ملاحظـــــــــــــة

حيث تكون الدالة قانون حجم الشكل المطلوب

مثــال :

كرة نصف قطرها 3.1 cm جد حجمها بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة.

جـ :

نفرض أن حجم الكرة هو v وطول نصف قطرها r فيكون الحجم $v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

$b = 3.1$
$a = 3$
$h = 0.1$

$v(a) = v(3) = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = \frac{4}{3}\pi(9) = \frac{4}{3}\pi(9) = 36\pi$

$v'(x) = 4\pi r^2 \Rightarrow v'(a) = v'(3) = 4\pi(3)^2 \Rightarrow v'(3) = 36\pi$

$\because f(a+h) = f(b) \cong f(a) + h f'(a)$

$\therefore v(3.1) \cong 36\pi + (0.1)(36\pi) \cong 36\pi - 3.6\pi \cong 39.6\pi\ cm^3$

خامسا : - أعطاء الحجوم أو المساحات والمطلوب أيجاد الطول بصورة تقريبية

ملاحظـــــــــــــة

في مثل هذه الأسئلة يعطي الحجم في السؤال ويطلب أيجاد أرتفاع أو طول أو عرض أو نصف القطر حيث نجد المجهول بصورة طبيعية كما مر سابقاً ثم سيظهر لدينا المطلوب بشكل جذر لا يمكن حله فنستخدم موضوع التقريب لحله كما في الحالة الأولى

مثـال :

مخروط دائري قائم حجمه $210\pi\ cm^2$ جد طول نصف قطره بصورة تقريبية باستـخدام القيمة المتوسطة علماً أن الأرتفاع $10\ cm$.

جـ: نفرض أن حجم المخروط هو v والأرتفاع y وطول نصف قطرها r فيكون الحجم $v=\frac{1}{3}\pi r^2 y$ يجب أن نجد نصف القطر

$$210\pi=\frac{1}{3}\pi r^2(10)\Rightarrow r^2=\frac{(210\pi)(3)}{10\pi}=63$$

يحب أن نجد الجذر بصورة تقريبية لنفرض أن

$$r^2=63\quad\Rightarrow\quad r=\sqrt{63}\Rightarrow f(x)=\sqrt{x}$$

$f(x)=\sqrt{x}$ ∴ الدالة هي

$b=63$
$a=64$ −
$h=-1$

$$f(a)=f(64)=\sqrt{64}=7 \qquad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(a)=f'(64)=\frac{1}{2\sqrt{64}}\Rightarrow f'(64)=\frac{1}{2(8)}=\frac{1}{16}$$

$$f'(a)=f'(64)=\frac{1}{16}=0.06$$

$$\because f(b)\cong f(a)+hf'(a)$$

$\therefore r=\sqrt{63}\cong 8+(-1)(0.06)\cong 7.94$ طول نصف قطر الخروط هو

ملاحظـــــــــــة

في بعض الأسئلة يطلب أيجاد القيمة التقريبية لعدد مرفوع الى أس كسر فيجب الحل كما يلي : $b^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{b^m}$ أو $b^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{b}$

في بعض الأسئلة يطلب أيجاد القيمة التقريبية لعدد مرفوع الى أس سالب فيجب الحل كما يلي : $b^{\frac{-m}{n}}=\frac{1}{b^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{b^m}}$ أو $b^{\frac{-1}{n}}=\frac{1}{b^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{b}}$ أو $b^{-n}=\frac{1}{b^n}$

مثـال : ح1/ 2017

جد القيمة التقريبية للمقدار $(15.6)^{\frac{-1}{4}}$ مستخدماً نتيجة القيمة المتوسطة

جـ:

$b=15.6$
$a=16$ −
$h=-0.4$

الدالة هي $f(x)=\sqrt[4]{x^{-1}}=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

$$f(a)=f(16)=\frac{1}{\sqrt[4]{16}}=\frac{1}{2}=0.5$$

$$f'(x)=\frac{-1}{4\sqrt[4]{x^5}}\Rightarrow f'(a)=f'(16)=\frac{-1}{4\sqrt[4]{(16)^5}}$$

$$f'(16)=\frac{1}{4(\sqrt[4]{16})^5}\Rightarrow f'(816)=\frac{-1}{4(2)^5}=\frac{-1}{4(32)}=\frac{-1}{48}=-0.008$$

$$\because f(b)\cong f(a)+hf'(a)$$

$$\therefore (15.6)^{\frac{-1}{4}}\cong 0.5+(-0.4)(-0.008)\cong 0.5+0.0032\cong 0.5032$$

أختبـــــر نفسك في الأسئلة الوزاريـــــة

[2014]	كرة نصف قطرها $(6cm)$ طليت بطلاء سمكه $(0.1cm)$ جد كمية الطلاء بصورة تقريبية بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة	$[Ans:\ 14.4\pi cm^3]$
[2015]	بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد حجم مخروط دائري قائم بصورة تقريبية علماً أن طول قطر قاعدته يساوي أرتفاعه وهو $(3.99cm)$	
[2015]	إذا كانت $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ جد مقدار التغير التقريبي للدالة إذا تغيرت (x) من (4) الى (4.01)	$Ans:\ -0.000625$
[2016]	كرة نصف قطرها $(3.001cm)$ جد حجمها وبصورة تقريبية بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة	$[Ans: 36.012\ \pi cm^3]$
[ح1 2017]	جد القيمة التقريبية للمقدار $(15.6)^{\frac{-1}{4}}$ مستخداماً نتيجة القيمة المتوسطة	$[Ans:\ 0.5032]$
[ط1 2017]	مخروط دائري قائم أرتفاعه يساوي قطر قاعدته فأذا كان أرتفاعه $(2.96\ cm)$ جد حجمه بصورة تقريبية بأستخدام نتيجة القيمة المتوسطة	$[Ans: 2.16\ \pi]$
[ح2 2017]	أذا تغيرت (x) من (32) الى (32.06) جد مقدار التغير التقريبي للدالة $f(x)=\sqrt[5]{x}$	
[ط2 2017]	جد بأستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة تقريباً مناسباً للعدد $\frac{1}{\sqrt[5]{33}}$	
[ط3 2017]	جد بصورة تقريبية حسب نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة $\sqrt[5]{(31)^{-1}}$	
[ح3 2018]	أذا علمت أن $f(x)=\sqrt[3]{3x+24}$ جد قيمة $f(1.01)$ بصورة تقريبية بأستخدام التفاضلات.	

النهايات العظمى والصغرى

مثـــال :

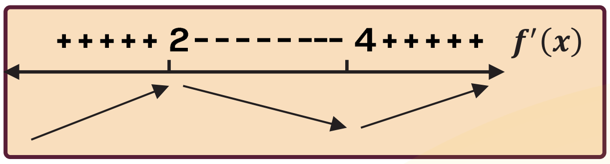
جـد مناطق التزايد والتناقـص ونقط الحرجة وبين نـوعها للدوال الاتيـة : $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

جـ:

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 \quad , \quad f'(x) = 0$

$[3x^2 - 18x + 24 = 0] \div 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 6x + 8 = 0$

$(x - 2)(x - 4) = 0 \Rightarrow either \;\; x = 2 \;\; or \;\; x = 4$



الدالة متناقصة في الفترة $(2, 4)$

الدالة متزايدة في الفترتين $\{x : x < 2\}$ و $\{x : x > 4\}$

$f(2) = (2)^3 - 9(2)^2 + 24(2) = 8 - 36 + 48 = 20$

$f(4) = (4)^3 - 9(4)^2 + 24(4) = 64 - 144 + 96 = 16$

النقطة $(2, 20)$ نهاية عظمى محلية و النقطة $(4, 16)$ نهاية صغرى محلية

التقعر والتحدب ونقاط الأنقلاب

مثـــال1 :

جد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب للدوال الاتية :

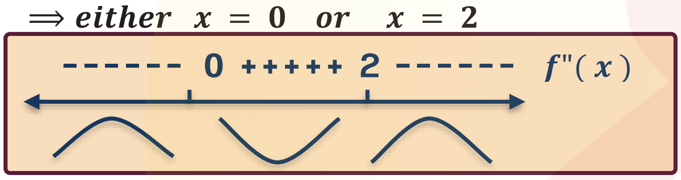
جـ:

1) $f(x) = 4x^3 - x^4$

$f'(x) = 12x^2 - 4x^3 \Rightarrow f''(x) = 24x - 12x^2 \Rightarrow f''(x) = 0$

$[24x - 12x^2 = 0] \div 12 \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0$

$\Rightarrow either \;\; x = 0 \;\; or \;\; x = 2$



الدالة مقعرة في الفترة المفتوحة $(0, 2)$

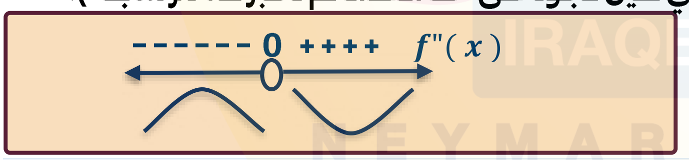
الدالة محدبة في $\{x : x < 0\}$ و $\{x : x > 2\}$

النقطتان $(0, 0), (2, 16)$ نقط أنقلاب

2) $f(x) = x + \dfrac{1}{x} = x + x^{-1} \quad , \quad x \neq 0$

$f'(x) = 1 - x^{-2} \Rightarrow f''(x) = 2x^{-3} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{2}{x^3} \quad , f''(x) \neq 0$

لعدم مساواة المشتقة الثانية للصفر نختبرها عند القيم التي تجعل المقام يساوي صفر (أي نعين فجوة على خط الأعداد ثم نختبر كما مر سابقا).



الدالة محدبة في الفترة $\{x : x < 0\}$

الدالة مقعرة في الفترة $\{x : x > 0\}$

لا توجد نقاط انقـلاب لان الصفر لاينتمي الى مجال الدالة

ملاحظات حول أيجاد الثوابت

ملاحظات لإيجاد الثوابت $a, b, c \in R$ للدالة $y = f(x)$ نقصد بـ h, k أعداد تعطى بالسؤال

1 إذا أعطي في بالسؤال أي نقطة (h, k) تنتمي للمنحني فهذا يعني أن $f(h) = k$

2 إذا أعطي في السؤال بأن النقطة (h, k) نهاية عظمى أو صغرى أو حرجة فيوجد أستنتاجان وهما

$f(h) = k \ldots\ldots\ldots (1) \qquad f'(h) = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$

3 إذا أعطي في السؤال بأن الدالة تمتلك النقطة نهاية عظمى أو صغرى أو حرجة عند $x = h$ فيوجد أستنتاج واحد وهو

$f'(h) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

4 إذا أعطي بالسؤال بأن الدالة متزايدة عند $\{\forall x < h\}$ ومتناقصة عند $\{\forall x > h\}$ أو العكس فهذا يعني أن h تكون نهاية محلية ونستنتج منها

$f'(h) = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$

5 إذا أعطي في السؤال بأن الدالة تمتلك النقطة (h, k) أنقلاب فيوجد أستنتاجان وهما

$f(h) = k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \qquad f''(h) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

6 إذا أعطي في السؤال بأن الدالة تمتلك نقطة أنقلاب عند $x = h$ فيوجد أستنتاج واحد وهو

$f''(h) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

7 إذا أعطي بالسؤال بأن الدالة محدبة عند $\{\forall x < h\}$ ومقعرة عند $\{\forall x > h\}$ أو العكس فهذا يعني أن h تكون نقطة أنقلاب ونستنتج منها

$f''(h) = 0 \ldots\ldots (1)$

8 إذا أعطي في السؤال بأن قيمة النهاية العظمى أو الصغرى هي k فهذا يعني أن (x, k) تمثل النهاية ويجب أيجاد الـ x من المشتقة الأولى كما مر في موضوع النهايات حيث أن كلمة (قيمة – تساوي – مقدار) يعني دائما الأحداثي الصادي

9 إذا أعطي في السؤال بأن قيمة نقطة الأنقلاب هي k فهذا يعني أن (x, k) تمثل نقطة الأنقلاب ويجب أيجاد الـ x من المشتقة الثانية كما مر في موضوع الأنقلاب حيث أن كلمة (قيمة – تساوي – مقدار) يعني دائما الأحداثي الصادي

10 إذا أعطى في السؤال الميل m للمنحني $f(x)$ عند النقطة (h, k) فهذا يعني

$f(h) = k \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1) \qquad f'(h) = m \dots\dots\dots\dots\dots (2)$

11 ميل المستقيم $y = ax + c$ هو المشتقة الأولى $m = y'$ أو $m = \frac{-x\ \text{معامل}}{y\ \text{معامل}}$ ولكن بعد تصفير معادلة المستقيم اي يجب ان تكون على الشكل

$ax + by + c = 0$

12 إذا أعطى في السؤال بأن المنحني $f(x)$ يمس المستقيم $ax + by + c = 0$ عند النقطة (h, k) فأننا نجد الميل m من المستقيم ويكون ميل المنحني يساوي ميل المستقيم عند نقطة التماس أي نحصل على الأستنتاج الأتي

$f(h) = k \dots\dots\dots\dots (1) \qquad f'(h) = m \dots\dots\dots\dots (2)$

مثـــال 2017/2:

لتكن $f(x) = x^2 + \frac{a}{x} \ ; x \neq 0$ جد قيمة a علما ان الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x = 1$ ثم بين ان الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية .

جـ:

الأستنتاج :- $\because$ الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x = 1 \Leftarrow f''(1) = 0 \quad \therefore$

$f(x) = x^2 + a x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x - a x^{-2}$

$f''(x) = 2 + 2 a x^{-3} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 2 + \frac{2a}{x^3}$

$2 + \frac{2a}{(1)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2a = -2) \div 2 \quad \Rightarrow \quad a = -1$

$f(x) = x^2 + \frac{-1}{x} \quad \Rightarrow f(x) = x^2 - \frac{1}{x} = x^2 - x^{-1}$

$f'^{(x)} = 2x + x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

$2x + \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^3 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = \frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$

$f''\left(\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}\right) = 2 - \frac{2}{\left(\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}\right)^3} = 2 - \frac{2}{\frac{-1}{2}} = 2 + 4 = 6 > 0$

لاحظ أشارة المشتقة الثانية موجبة وهذا يعني أن الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية

- $\therefore$ توجد لتدالة نهاية صغرى محلية عند $x = \sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$
- $\therefore$ الدالة لا تمتلك نهاية عظمى محلية

سؤال 3:

اذا كان $f(x) = a x^3 + bx^2 + cx$, $g(x) = 1 - 12x$ وكان كل من f, g تماسان عند نقطة انقلاب المنحني f وهي $(1, -11)$ جد قيم الثوابت a, b, c الحقيقية .

جـ:

الأستنتاج :- $f'(1) = m \quad , \quad f(1) = -11 \quad , \quad f''(1) = 0 \quad \therefore$

ولكن ميل المستقيم هو المشتقة الاولى للمستقيم

$g(x) = 1 - 12x \quad \Rightarrow g'(x) = -12 \quad \Rightarrow m = -12 \quad \Rightarrow \therefore f'(1) = -12$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= a x^3 + bx^2 + cx \\ f'(x) &= 3 a x^2 + 2bx + c \end{aligned}\right\} \text{دائما نبدأ الحل في المعادلتين المتساوية بالثوابت}$$

$f''(x) = 6 a x + 2b$

$\because f(1) = -11 \quad \Rightarrow \quad \therefore a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) = -11$

$a + b + c = -11 \dots\dots\dots\dots (1)$

$f'(3) = -12 \quad \Rightarrow \quad 3a(1)^2 + 2b(1) + c = -12$

$3a + 2b + c = -12 \dots\dots\dots\dots (2)$

$3a + 2b + c = -12 \dots\dots (2)$

$\mp a \quad \mp \cancel{b} \mp c = \pm 11 \dots\dots (1)$ بالطرح

$2a + \cancel{b} = -1 \dots\dots\dots\dots (3)$

$f''(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad [\, 6a(1) + 2b = 0 \,] \div 2 \quad \Rightarrow 3a + b = 0 \dots\dots (4)$

$3a + \cancel{b} = 0 \dots\dots (4)$

$\mp 2a \cancel{\mp} b = \pm 1 \dots\dots (3)$ بالطـرح

$a = 1$

$3(1) + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -3$ نعوض في معادلة (4)

$1 + (-3) + c = -11 \quad \Rightarrow \quad c = -9$ نعوض قيم a, b في معادلة (1)

سؤال 4:

اذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى محلية لمنحنى الدالة $f(x)=3x^2-x^3+c$ فجد قيمة c الحقيقية ثم جد معادلة المماس للمنحنى عند نقطة انقلابه.

جـ:

الأستنتاج :- الدالة تمتلك نهاية صغرى تساوي 6 فهذا يعني $(x,6)$ النهاية الصغرى

نجد قيمة x للنهاية صغرى للدالة من المشتقة الأولى

$$f'(x)=6x-3x^2 \quad , f'(x)=0 \Rightarrow 6x-3x^2=0 \Rightarrow 3x(2-x)=0$$
$$either \quad 3x=0 \Rightarrow x=0 \quad \Rightarrow \quad or \ 2-x=0 \Rightarrow x=2$$

نختبر قيم x على خط الاعداد

------ 0 +++++ 2 ------ $f'(x)$

الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية عند $x=0$

∴ نقطة النهاية الصغرى المحلية هي $(0,6)$ تحقق الدالة

$$\therefore f(0)=6 \Rightarrow 3(0)^2-(0)^3+c=6 \Rightarrow c=6$$

نجد نقطة الأنقلاب للدالة $f(x)=3x^2-x^3+6 \Rightarrow f'(x)=6x-3x^2 \quad f''(x)=6-6x \quad , f''(x)=0$

$$6-6x=0 \Rightarrow 6x=6 \Rightarrow x=1$$

$f''(x)$ ------ 1 +++++

∴ النقطة $(1,8)$ هي نقطة انقلاب

الميل هو المشتقة الأولى لنقطة التماس $m=f'(1) \Rightarrow m=6(1)-3(1)^2=3$

$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-8=3(x-1) \Rightarrow y-8=3x-3$$

معادلة المماس هي: $3x-y+8-3=0 \Rightarrow 3x-y+5=0$

أختبـــــر نفسك في الأسئلة الوزاريـــــة

2) ط2/2022ح 2019ح2/2020	إذا كانت $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ وكانت f مقعر $\forall x>1$ ومحدب $\forall x<1$ وللدالة نقطة نهاية عظمى محلية $(-1,5)$, جد قيمة $a,b,c\in R$ ؟	$[a=1, b=-3, c=-9]$
(2011)	إذا كانت $(2,6)$ نقطة حرجة لمنحنى الدالة $f(x)=a-(x-b)^4$ جد قيمتي a,b الحقيقيتين ثم بين نوع النقطة الحرجة	$[Ans:\ a=6\ ,\ b=2]$
(2015)	إذا كانت $f(x)=ax^3+3x^2+c$ وكان للدالة نهاية عظمى محلية 8 ونقطة أنقلاب عند $x=1$, جد قيمة $a,c\in R$	$[a=-1\ ,c=-4]$
(2017ح1)	إذا كان منحنى الدالة $f(x)=ax^3+bx^2+c$ مقعراً في $x<1$ ومحدب في $x>$ ويمس المستقيم $(y+9x=28)$ عند $(3,1)$ جد قيمتي a,b,c	$[Ans: a=-1, b=3, c=1]$
(2017ح3)	المستقيم $3x-y=7$ يمس المنحنى $y=ax^2+bx+c$ عند النقطة $(2,-1)$ وكانت له نهاية محلية عند $x=\frac{1}{2}$, جد قيمة $a,b,c\in R$ ؟	
(2018ح3) (2018ح2)	إذا كانت للدالة $f(x)=3x-x^3+c$ تمتلك نهاية عضمى محلية تنتمي لمحور السينات , جد ثم جد معادلة المماس عند نقطة أنقلابة ؟	
(2021ح3)	عين قيمتي الثابتين $a,b\in R$ لكي يكون لمنحنى الدالة $y=x^3+ax^2+bx$ نهاية عظمى محلية عند $x=-1$ ونهاية صغرى محلية عند $x=2$, ثم جد نقطة الأنقلاب؟	
1ح3/2021ح 2013/2019	إذا كانت $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ حيث أن $x\neq 0$, $a\in R$ بين أن الدالة لا تمتلك نهاية عظمى محلية مهما كانت قيمة a.	

رسم المخطط البياني للدالة

لرسم المخطط البياني للدالة باستخدام التفاضل نتبع الخطوات الآتية :

أولا / أوسع مجال للدالة

أ) اذا كانت الدالة متعددة حدود فان أوسع مجال للدالة هو R

ب) اذا كانت الدالة كسرية $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ فأن أوسع مجال هو $R-\{x=$ قيم x التي تجعل المقام صفر$\}$

ثـانيا / التنـاظر

أ) إذا كانت الدالة $f(x)$ زوجية تكون متناظرة حول محور (y) المحور الصادي , حيث تكون الدالة زوجية إذا كانت الأسس في جميع الحدود زوجية ويعتبر الحد الخالي من الـ(x) زوجي دائماً , وكذلك تحقق $f(-x) = f(x)$

ب إذا كانت الدالة $f(x)$ فـردية تكون متناظرة حـول نقطـة الاصل, حيث تكون الدالة فـردية إذا كانت الأسس في جميع الحدود فـردية , وكذلك تحقق $f(-x) = -f(x)$

ثـالثا / نقـاط التـقاطع مع المحـورين

أ) مع محـور الصادات (y) : نجعل $x = 0$ فنجـد قيـم (y) فنحصل على $(0, y)$.

ب) مع محـور السينات (x): نجعل $y = 0$ فنجـد قيـم (x) فنحصل على $(x, 0)$

رابعـا / المحـاذيـات (للدوال الكسرية فقط)

أ) المحاذي العمودي : وهوقيم x التي تجعل المقام صفر $x =$ إي أن المستثناة من أوسع مجال للدلة $x =$

ب المحاذي الافقي : حيث يكون

1) $(y = 0)$ إذا كانت لا توجد x في البسط أي يكون بسطها عدد ثابت اذا كـانت الـدالة الكسـرية بسطها عـدد ثـابت

2) $y = \frac{\text{معامل اعلى اس في البسط}}{\text{معامل اعلى اس في المقام}}$ اذا كـانت درجة بسط نفس درجة القام

ملاحظـــــــــــــــــة

المحاذى الافقى هو قيمة الـ y التى تجعل المقام يساوى صفراً بعد تحويل الدالة بدلالة الـ y

خـامسا / المشتقة الأولى

ومنها نجد مناطق التزايد والتناقص والنقط الحرجة والنهايات العظمى والصغرى المحلية

ملاحظـــــــــــــــــة

في الدوال الكسرية إذا كانت المشتقة الأولى ثابت على دالة إي على شكل $f'(x) = \frac{\text{عدد}}{\text{دالة}}$ فلا توجد نقط الحرجة ولا نهايات لأن $f'(x) \neq 0$ ونعين القيم التي تم أستثنائها من أوسع مجال للدالة بشكل فجوة على خط الأعداد للمشتقة المشتقة للأختبار لأيجاد مناطق التزايد والتناقص .

سادسا / المشتقة الثانية

ومنها نجد مناطق التحدب والتقعر والنقط الأنقلاب

ملاحظـــــــــــــــــة

في الدوال الكسرية إذا كانت المشتقة الثانية ثابت على دالة إي على شكل $f''(x) = \frac{\text{عدد}}{\text{دالة}}$ فلا توجد نقط أنقلاب لان $f''(x) \neq 0$ ونعين القيم التي تم أستثنائها من أوسع مجال للدالة بشكل فجوة على خط الأعداد للمشتقة الثانية للأختبار لأيجاد مناطق التحدب والتقعر.

سابعـا / الجدول والرسم . حيث نكون جدول على الشكل الأتي

x	y	(x, y)
x_1	y_1	(x_1, y_1)
x_2	y_2	(x_2, y_2)
x_3	y_3	(x_3, y_3)

حيث نكتب جميع النقاط التي تم أيجادها مما سبق في هذا الجدول وأن كانت غير كافية نضيف نقط أضافية.

ملاحظـــــــــــــــــة

لرسم المخطط يجب رسم المحورين الأحداثيين أولا ووضع المسافات المتساوية بين كل عدد وعدد ونقوم بتحديد النقاط التي تم كتابتها في الجدول حيث يعتمد الرسم أعتماد أساسي على النهايات حيث ترسم تحدبا $\cap$ على نقطة النهاية العظمى نرسم تقعرا $\cup$ على نقطة النهاية الصغرى ثم نصل بين المنحنين ينتج لدينا الرسم .

أما إذا كانت الدالة كسري فيعتمد الرسم على المحاذيات

1) $f(x) = 6x - x^3$

1 أوسـع مجـال للـدالـة هو R (لأنها متعـددة حـدود)

2 التنـاظـر: التناظرحول نقطة الأصل لأن $f(-x) = -f(x)$

3 نقـاط التـقاطع مع المحـورين:

أ- مع محور الصادات نجعل $x = 0$

$y = 6(0) - (0)^3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0)$

ب- مع محور السينات نجعل $y = 0$

$6x - x^3 = 0 \Rightarrow x(6 - x^2) = 0 \Rightarrow eithr \;\; x = 0$

$or \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6} \Rightarrow (0,0) \;,\; (\sqrt{6},0) \;,\; (-\sqrt{6},0)$

4 المحاذيات: المحاذيات لا توجد الدالة ليست كسرية.

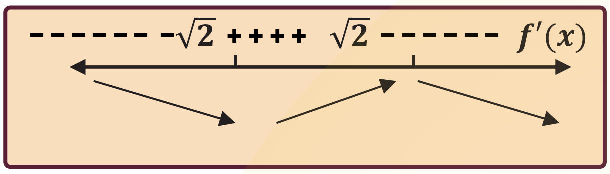
5 المشتقة الأولى:

ومنها نجد التزايد والتناقص والنهايات $f'(x) = 6 - 3x^2 \quad , f'(x) = 0$

$6 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

نقاط حرجة $f(\sqrt{2}) = 6(\sqrt{2}) - (\sqrt{2})^3 = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2}, 4\sqrt{2}) \quad f(-\sqrt{2}) = 6(-\sqrt{2}) - (-\sqrt{2})3 = -6\sqrt{2} +$

$2\sqrt{2} = -4\sqrt{2} \Rightarrow (-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$



$(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ نهاية عظمى محلية

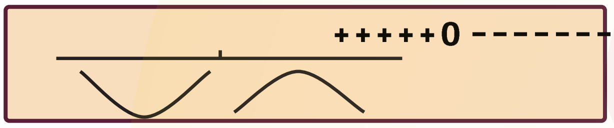
$(-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ نهاية صغرى محلية

6 المشتقة الثانية

ومنها نجد التحدب والتقعر ونقاط الانقلاب

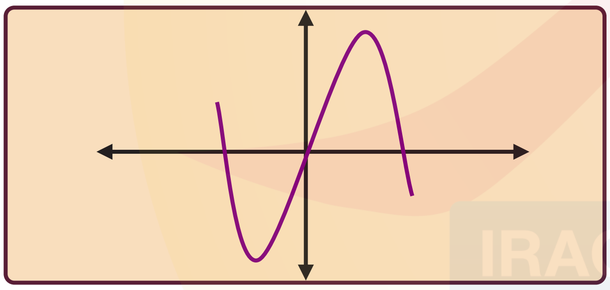
$f''(x) = -6x \quad , \quad f''(x) = 0 \Rightarrow -6x = 0 \Rightarrow x = 0$

النقطة $(0,0)$ نقطة انقلاب



7 الجدول والرسم .

x	y	(x, y)
0	0	$(0,0)$
$\sqrt{6}$	0	$(\sqrt{6},0)$
$-\sqrt{6}$	1	$(-\sqrt{6},0)$
$\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$
$-\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$



$(3) \; y = \dfrac{3x-1}{x+1}$

1 أوسع مجال للدالة هو $R - \{-1\} \; x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

2 التناظر: لا يوجد تناظر لأن $f(-x) \neq -f(x)$ و $f(-x) \neq f(x)$

3 نقاط التقاطع مع المحورين:

مع محور الصادات نجعل $x = 0$ $\quad y = \frac{3(0)-1}{0+1} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0,-1)$

مع محور السينات نجعل $y = 0$ $\quad \frac{3x-1}{x+1} = 0 \Rightarrow 3x - 1 = 0$

$3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow (\frac{1}{3}, 0)$

4 المحاذيات:

أ – المحاذي العمودي $\quad x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

ب – المحاذي الافقي $\quad y = \frac{3}{1} \Rightarrow y = 3$

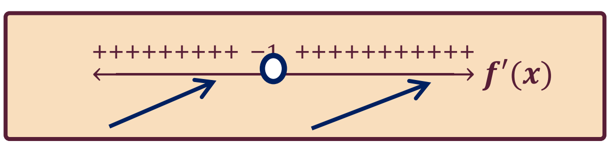
5 المشتقة الأولى:

نجد منها التزايد والتناقص والنهايات

$f'(x) = \dfrac{(x+1)(3) - (3x-1)(1)}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2} \neq 0 \,,\, f'(x) \neq 0$

(اذا كان البسط عدد ثابت فلا يمكن مساواته بالصفر)



$\therefore$ الدالة متزايدة في كل من $\{x : x < -1\} , \{x : x > -1\}$ ولا توجد نقاط حرجة .

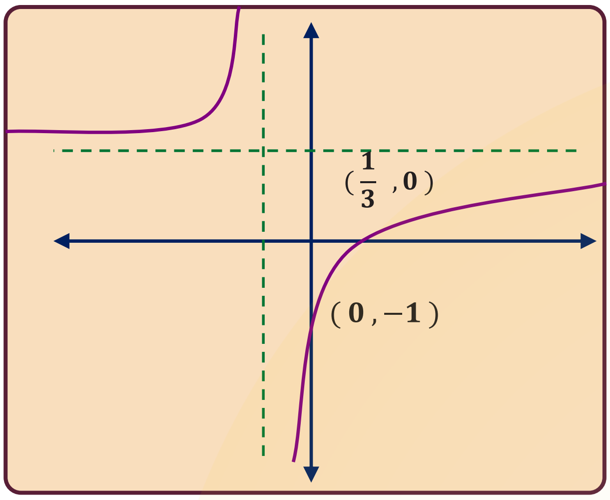
6 المشتقة الثانية نجد منها التـحـدب والتقعـر ونقـاط الانقـلاب

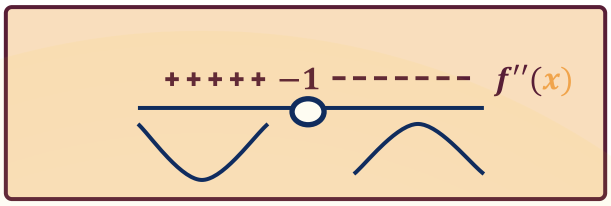
$$f''(x) = \frac{(x+1)^2(0) - 4[2(x+1)]}{(x+1)^4} \Rightarrow f''(x) = \frac{-8(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-8}{(x+1)^3} \neq 0 \quad , \quad f''(x) \neq 0$$

$\therefore$ الـدالـة لا تمتـلك نقـاط انقـلاب

بمـا ان المشتقـة الاولـى والمشتقـة الثـانيـة لا تسـاوي صفر لـذلك نختبـر منـاطق التحدب والتقعـر على خـط الاعـداد باستخـدام قيمـة المحـاذي العمـودي $x = -1$





الدالة مقعرة في $\{x: x < -1\}$ و محدبة في $\{x: x > -1\}$

الدالة لا تمتلك نقطة انقلاب لان (-1) لا ينتمي الى المجال.

x	$y = x^5$	(x, y)
$1/3$	0	$(1/3, 0)$
0	-1	$(0, -1)$

مثال:

بأستخدام مفاهيم التفاضل أرسم منحنى الـدالة $xy + y = 2$

جـ:

$$xy + y = 2 \Rightarrow y(x+1) = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{(x+1)} \Rightarrow y = 2(x+1)^{-1}$$

1 أوسـع مجال للـدالـة هـو $R - \{-1\}$ $\quad x + 1 \neq 0 \Rightarrow$

2 التنـاظـر: لا يوجد لأن $f(-x) \neq f(x)$ و $f(-x) \neq -f(x)$

3 نقـاط التقـاطع مع المحـورين:

أ- مع محور الصادات نجعل $x = 0$ لكن $x \neq 0$ (لا توجـد نقاط تقاطع)

ب - مع محور السينات لا يوجد لأن $y \neq 0$ $\quad \frac{2}{x+1} \neq 0 \Rightarrow 2 \neq 0$

4 المحـاذيـات:

أ – المحاذي العمودي $x = -1$

ب – المحاذي الافقي $y = 0$

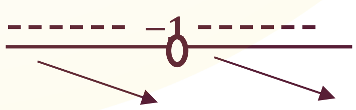
5 المشتقة الأولى:

نجد منها التـزايد والتنـاقص والنهايات

$$f(x) = 2(x+1)^{-1} \Rightarrow f'(x) = -2(x+1)^{-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2}$$

(اذا كـان البسـط المشتقة عـدد ثابت فـلا يمكن مساواة المشتقة بالصفر)

$\therefore$ الـدالة لا تمتـلك نقاط حـرجة



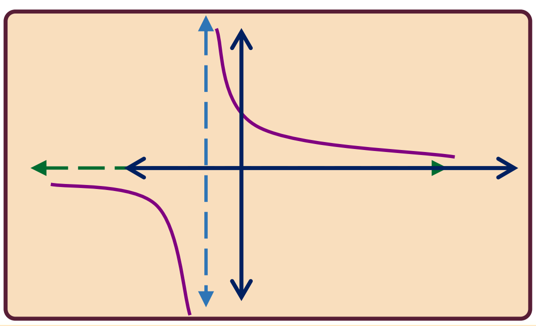
6 المشتقة الثانية

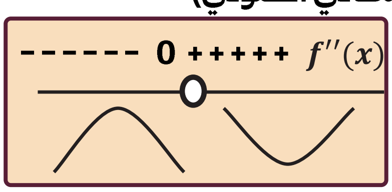
نجد منها التـحـدب والتقعـر ونقـاط الانقـلاب

$$f'(x) = -2(x+1)^{-2} \Rightarrow f''(x) = 4(x+1)^{-3} \Rightarrow f''(x) = \frac{4}{(x+1)^3}$$

$$\therefore f''(x) = \frac{4}{(x+1)^3} \neq 0$$

$\therefore$ الـدالة لا تمتلك نقـاط انقـلاب (نختبر التحدب والتقعر عند المحـاذي العمودي)





x	y	(x, y)
0	2	$(0, 2)$
1	1	$(1, 1)$
2	$\frac{2}{3}$	$\left(2, \frac{2}{3}\right)$

أختبـــــــر نفسك في الأسئلة الوزاريـــــة

بأستخدام معلوماتك بالتفاضل أرسم منحنى الدالة $f(x)=(x+2)(x-1)^2$	[2008/2003]
بأستخدام معلوماتك بالتفاضل أرسم منحنى الدالة $f(x)=x^3-3x+2$	[2006]
بأستخدام معلوماتك بالتفاضل أرسم منحنى الدالة $f(x)=(1-x)^3+1$	[2016/2013/2011]
بأستخدام معلوماتك بالتفاضل أرسم منحنى الدالة $f(x)=2x^2-x^4$	[2012]
بأستخدام معلوماتك بالتفاضل أرسم منحنى الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$	[2012]
بأستخدام معلوماتك بالتفاضل أرسم منحنى الدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$	[2023]
بأستخدام معلوماتك بالتفاضل أرسم منحنى الدالة $f(x)=x^5$	[2014]
بأستخدام معلوماتك بالتفاضل أرسم منحنى الدالة $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$	[2016/ 2017 ط2]
أرسم منحنى الدالة $f(x)=\frac{1}{x^2}$ بأستخدام معلوماتك بالتفاضل	[2018 ط2]

تطبيقات عملية على النهايات

لحل المسائل المتعلقة بالتطبيقات نتبع الخطوات الأتية :-

1 فرض الفرضيات (المجاهيل) مثل $x\,,y\,,z\,,h\,,v\,,A$

2 نرسم شكلا توضيحيا للمسألة أن أمكن

3 نكتب القانون الخاص بالمسألة (الدالة) (العلاقة الرئيسية) المتعلقة بالسؤال

ملاحظـــــــــة

يمكن معرفة الدالة (العلاقة الرئيسية) من المسألة حيث دائماً تكون معها قرينة أحد كلمات المقارنة (أكبر – أصغر – أعظم – أقل - ..... الخ)

4 إذا كانت الدالة (العلاقة الرئيسية) تحتوي على أكثر من متغير (مجهول) يجب جعلها ذات متغير واحد وذلك بأيجاد علاقة أخرى وهي العلاقة المساعدة حيث تحتوي على علاقة بين هذه المتغيرات

ملاحظـــــــــة

دائماً (العلاقة المساعدة) تكون خالية من كلمات المقارنة وتعطى بالسؤال إما بطريقة مباشرة وتعطى لها قيمة عددية على سبيل المثال أذا كان حجم الأسطوانة $125\ \pi\ cm^3$ أو تعطى بطريقة غير مباشرة ويمكن معرفتها كما يلي:

1) كل شكل يوضع داخل دائرة أو كرة مجوفة نوجد العلاقة المساعدة من نظرية فيثاغورس بين الأبعاد .

2) كل شكل يوضع داخل مثلث أو مـخروط مجوف نوجد العلاقة المساعدة من التشابه بين المثلثين بين الأبعاد .

3) في بعض الأحيان تعطى العلاقة المساعدة جاهزة في السؤال .

5 نقوم بكتابة الدالة بدلالة متغير واحد

6 نجد المشتقة الأولى للدالة ونجعل المشتقة تساوي صفراً

7 تتكون معادلة ذات متغير واحد نحل المعادلة نجد قيم ذلك المتغير ونختبرها على خط الأعداد فنحصل على المطلوب

ملاحظـــــــــة

راجع قوانين المساحات والمحيطات والحجوم للأشكال الهندسية .

مثال :

جد بعدي أكبر مثلث متساوي الساقين يمكن أن يوضع داخل دائرة نصف قطرها $12\ cm$.ثم برهن ان نسبة مساحة المثلث الى مساحة الدائرة $=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ ؟

جـ :

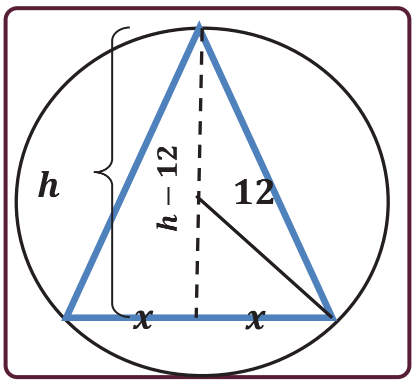
تذكيـــــــر: كل شكل يوضع داخل الدائرة أو كرة مجوفة نوجد العلاقة بين الابعاد من مبرهنة فيثاغورس .

نفرض طول قاعدة المثلث $2x$ والارتفاع h والمساحة A

مساحـة المثلـث = $\frac{1}{2}$ × القـاعدة × الارتفـاع

$$A=\frac{1}{2}(2x)(h)\quad\Rightarrow\quad A=h\,x\qquad .....(1)$$

حسب مبرهنة فيثاغورس $x^2+(h-12)^2=(12)^2$



$$x^2+h^2-24h+144=144$$

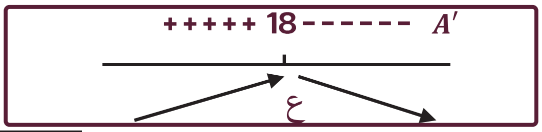
$x^2 = 24h - h^2 \quad x = \sqrt{24h - h^2} \quad \ldots\ldots (2)$

نعوض معادلة (2) في (1) $A = h\sqrt{24h - h^2} \Rightarrow = \sqrt{h^2(24h - h^2)}$

$A = \sqrt{24h^3 - h^4} \Rightarrow A' = \dfrac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}} \quad , \quad A' = 0$

$\dfrac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}} = 0 \Rightarrow 72h^2 - 4h^3 = 0 \Rightarrow 4h^2(18 - h) = 0$

$either \quad h = 0 \quad or \quad h = 18$



الارتفاع المطلوب (عنده نهاية عظمى) $h = 18\ cm$

$x = \sqrt{24(18) - (18)^2} = \sqrt{18(24 - 18)} = \sqrt{9 \times 2 \times 6} = \sqrt{9 \times 4 \times 3}$

$x = \sqrt{9} \times \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 3 \times 2 \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3}cm \Rightarrow 2x = 12\sqrt{3}cm$

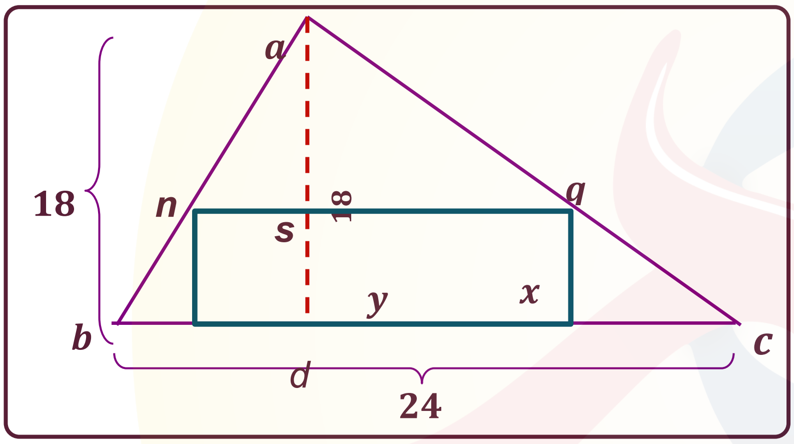
$\dfrac{\text{مساحة المثلث}}{\text{مساحة الدائرة}} = \dfrac{xh}{\pi r^2} = \dfrac{6 \times \sqrt{3} \times 18}{12 \times 12\pi} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

مثال :

جد بعدي اكبر مستطيل يمكن أن يوضع داخل مثلث طول قاعدته $18\ cm$ وارتفاعه $24\ cm$ بحيث ان رأسين متجاورين من رؤوسه تقعان على القاعدة والرأسين الباقيين تقعان على ساقيه.

جـ :

تذكيـــــر : كل شكل يوضع داخل مثلث أو مخروط نوجد العلاقة المساعدة من التشابه بين المثلثين بين الأبعاد.



نفرض أن أبعاد المستطيل الطول والعرض هي x , y

من تشابه المثلثين $abc \ , anq$

$\dfrac{y}{24} = \dfrac{18-x}{18} \Rightarrow y = \dfrac{24}{18}(18 - x)$

$\Rightarrow y = \dfrac{4}{3}(18 - x) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

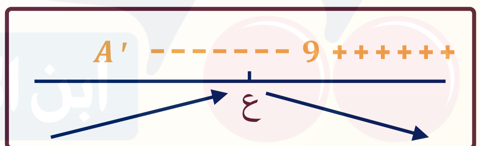
$A = xy \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض معادلة رقم (1) في (2)

$A = x.\dfrac{4}{3}(18 - x) \Rightarrow A = \dfrac{4}{3}(18x - x^2)$

$A' = \dfrac{4}{3}(18 - 2x) \ , \quad A' = 0 \ , \therefore \dfrac{4}{3}(18 - 2x) = 0$

$18 - 2x = 0 \Rightarrow x = 9\ cm$



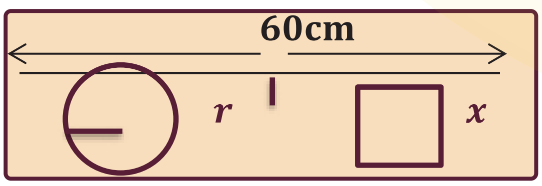
نهاية عظمى عند $x = 9$ وهو أحد بعدي المستطيل

$y = \dfrac{4}{3}(18 - 9) = \dfrac{4}{3}(9) = 12\ cm$

مثال :

مجموع محيطي دائرة ومربع يساوي $60\ cm$ اثبت انه عندما يكون مجموع مساحتي الشكلين أصغر ما يمكن فأن طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع .

جـ :



نفرض نصف قطر الدائرة هو r وطول ضلع المربع x

مجموع محيطي الدائرة والمربع $= 60 \quad [4x + 2\pi r = 60] \div 2$

$2x + \pi r = 30 \Rightarrow \pi r = 30 - 2x \Rightarrow r = \dfrac{1}{\pi}(30 - 2x) \ \ldots\ldots (1)$

الدالة هي : (مساحة المربع + مساحة الدائرة) $A = x^2 + \pi r^2 \ \ldots\ldots (2)$

نعوض قيمة r من معادلة (1) في (2) $A = x^2 + \pi[\frac{1}{\pi}(30 - 2x)]^2$

$A = x^2 + \dfrac{1}{\pi}(900 - 120x + 4x^2)$

$A' = 2x + \dfrac{1}{\pi}(-120 + 8x) \quad , \quad A' = 0$

$2x + \dfrac{1}{\pi}(-120 + 8x) = 0 \Rightarrow [2\pi x + 8x - 120 = 0] \div 2$

$\pi x + 4x - 60 = 0 \Rightarrow \pi x + 4x = 60$

$x\,(\pi + 4) = 60 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{60}{\pi + 4}\ cm$

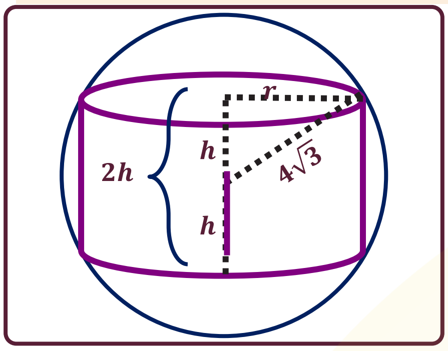
$r = \dfrac{1}{\pi}\left(30 - 2\left(\dfrac{60}{\pi + 4}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{1}{\pi}\left(30 - \dfrac{120}{\pi + 4}\right)$

$r = \dfrac{30}{\pi + 4}\ cm \quad \Rightarrow \quad 2r = \dfrac{60}{\pi + 4} \quad \Rightarrow \quad \therefore\ x = 2r$

سؤال 2:

جد ارتفاع اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل كرة نصف قطرها $4\sqrt{3}\ cm$.

جـ:



نفرض ان نصف قطر الاسطوانة r ، نفرض ارتفاع الاسطوانة $2h$

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$v = \pi r^2\,(2h) = 2\pi r^2 h \quad \dots\dots (1)$

حسب مبرهنة فيثاغورس $r^2 + h^2 = (4\sqrt{3})^2$

$r^2 + h^2 = 48 \Rightarrow r^2 = 48 - h^2 \dots\dots\dots (2)$

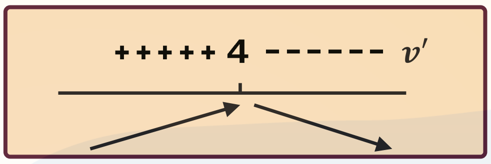
نعوض (2) في (1)

$v = 2\pi h(48 - h^2) \quad \Rightarrow \quad v = 2\pi\,(48h - h^3)$

$v' = 2\pi\,(48 - 3h^2) \quad ,\ v' = 0$

$2\pi\,(48 - 3h^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 48 - 3h^2 = 0$

$3h^2 = 48 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad h = 4$



اكبر ارتفاع $h = 4$ عندها نحصل على نهاية عظمى

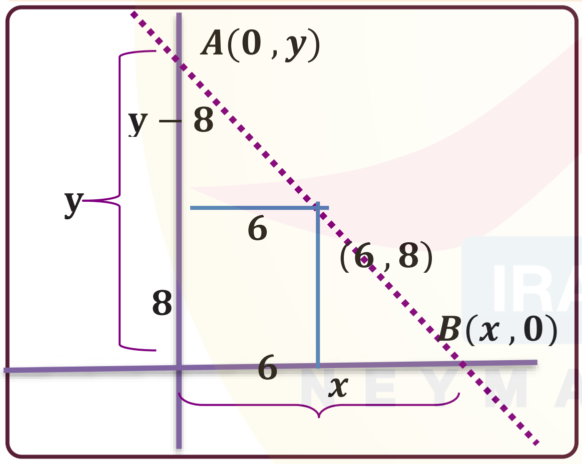
نصف قطر قاعدة الاسطوانة $r^2 = 48 - 16 = 32 \quad \Rightarrow \quad r = 4\sqrt{2}$

ارتفاع الاسطوانة $2h = 8\ cm$

سؤال 7:

جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (6 , 8) والذي يصنع مع المحورين في الربع الاول اصغر مثلث

جـ:



نفرض نقطة التقاطع مع محور السينات$(x\,,0)$ ، و نقطة التقاطع مع محور الصادات $(0\,,y)$

نصف القاعدة × الارتفاع = مساحة المثلث

$A = \dfrac{1}{2}\,xy \dots (1)$

من تشابه $\dfrac{y}{y-8} = \dfrac{x}{6} \Rightarrow x(y-8) = 6y$

$\Rightarrow x = \dfrac{6y}{y-8} \dots\dots\dots (2)$

نعوض (2) في (1)

$A = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{6y}{y-8} \times y \Rightarrow A = \dfrac{3\,y^2}{y-8}$

$A' = \dfrac{(y-8)(6y) - 3y^2(1)}{(y-8)^2} \quad \Rightarrow \quad A' = \dfrac{6y^2 - 48y - 3y^2}{(y-8)^2} \quad , \quad A' = 0$

$\dfrac{3y^2 - 48y}{(x-6)^2} = 0 \Rightarrow [\ 3y^2 - 48y = 0\ ] \div 3 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 16y = 0$

$y(y-16) = 0 \Rightarrow$ $either\ \ y = 0$ يهمل $\Rightarrow$ $or\ \ y = 16$

∴ نقطة التقاطع مع الصادات هي (0 , 16)

المعادلة المستقيم بدلالة النقطتين (0 , 16) , (6, 8)

$\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y-8}{x-6} = \dfrac{16-8}{0-6}$

$\dfrac{y-8}{x-6} = \dfrac{-8}{6} \quad \Rightarrow \dfrac{y-8}{x-6} = \dfrac{-4}{3} \Rightarrow 3y - 24 = -4x24 \Rightarrow 4x + 3y - 48 = 0$

معادلة المستقيم هي $4x + 3y - 48 = 0$

طريقة أخرى الميل هو المشتقة الأولى لنقطة التماس وهي (6, 8)

$A = \dfrac{1}{2}\,xy \quad \Rightarrow \quad A' = \dfrac{1}{2}(x\,y' + y(1)) \quad \Rightarrow \quad A' = 0$

$\dfrac{1}{2}(x\,y' + y) = 0 \quad \times 2 \ \Rightarrow\ 6\,y' + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \therefore\ m = y' = \dfrac{-4}{3}$

$\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = m \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y-8}{x-6} = \dfrac{-4}{3} \Rightarrow 3y - 24 = -4x24 \Rightarrow 4x + 3y - 48 = 0$

معادلة المستقيم هي $4x + 3y - 48 = 0$

أختبـــــر نفسك في الأسئلة الوزاريـــــة

جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعها داخل كرة مجوفة طول نصف نصف قطرها $(3\ cm)$	[2008]
خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة طول قاعدته ضعف عرضها فاذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعته $108\ m^2$ جد ابعاد الخزان لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن علما ان الخزان ذو غطاء كامل .	[2016]
جد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل نصف دائرة نصف قطرها $(4\sqrt{2}\ cm)$	[2012/2013]
جد أقل محيط لمستطيل مساحته $(16\ cm^2)$ $[Ans: C = 16cm\ ]$	2005/ 2014/2006
جد اكبر اكبر لمخروط دائري قائم ناتج من دوران مثلث قائم الزاوية طول وتره $(6\sqrt{3}\ cm)$ أدير حول أحد ضلعيه القائمين	[2014/2011]
جد أبعاد اكبر أسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم أرتفاعه $(8\ cm)$ وطول قطر قاعدته $(12\ cm)$	[2011]
جد أرتفاع أكبر أسطوانة دائرية قائمة توضع داخل كرة مجوفة نصف قطرها $(4\sqrt{3}\ cm)$	[2014]
جد أكبر مساحة مثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $(8\sqrt{2}\ cm)$	[2017 ط1]
جد أبعاد اكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة بمنحني الدالة : $f(x) = 12 - x^2$ ومحور	[2017ج2]
علبة أسطوانية الشكل مفتوحة من الأعلى سعتها $(125\ \pi\ cm^3)$ جد أبعادها إذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعتها أقل ما يمكن	2 ط 3/2022ج /2020 ت ج 2019]
جد مساحة أكبرأسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم أرتفاعه $(24\ cm)$ وطول نصف قطر قاعدته $(12\ cm)$ لاحظ : لم يذكر السؤال أيجاد أكبر مساحة انما ذكر جد مساحة أكبر أسطوانة (حجم)	[2018ج2]
صنع صندوق من قطعة من النحاس مربعة الشكل طول ضلعها $(12\ cm)$ قطعت من أركانها الأربعة مربعات متساوية المساحة ثم ثنيت الأجزاء البارزة لتكون علبة بدون غطاء ما أعظم حجم لذلك الصندوق .	2 ط 2022/ خ ط 2019/ط2 2018]
جد أبعاد اكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة بمنحني الدالة : $f(x) = 12 - x^2$ ومحور السينات والرأسان من رؤوسه على المنحني والرأسان الأخران على محور السينات , ثم جد محيطه؟	[2020ج3]
جد نقطة أو نقاط تنتمي للقطع الزائد $y^2 - x^2 = 3$ لكي تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(0\ ,4)$	[2019 ط2]
س: جد عددين مجموعهما 75 وحاصل ضرب احدهما في مربع الاخر أكبر ما يمكن .	

الفصل الرابع التكـــــامل

المجاميع العليا والمجاميع السفلى

ملاحظـــــــــــة

سوف نطلق على $L(\sigma, f)$ مجموع المستطيلات السفلى ((المجموع الأسفل))

وسوف نطلق على $U(\sigma, f)$ مجموع المستطيلات العليا ((المجموع الأعلى))

- وبصورة عامة إذا كان لدينا $[a, b]$ وأردنا ان نجزئها إلى n من الفترات المنتظمة فأن طول الفترة $= h = \frac{b-a}{n}$.

مثـــال:

أوجد كل من $L(\sigma, f)$ $U(\sigma, f)$, لكل مما يأتي

2) $f: [0, 4] \to R$, $f(x) = 4x - x^2$ إذا كان $\sigma = (0, 1, 2, 3, 4)$

الحـــل: $f'(x) = 4 - 2x \Rightarrow 4 - 2x = 0$

$2x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

f' : ++++++++ 2 ----------

x	$f(x)$
0	$0 - 0 = 0$
1	$4 - 1 = 3$
2	$8 - 4 = 4$
3	$12 - 9 = 3$
4	$16 - 16 = 0$

$\therefore \quad f(2) = 8 - 4 = 4 \Rightarrow (2,4)$ نقطة عظمى محلية

الدالة متزايدة عند $[0, 1][1, 2]$ ومتناقصة عند $[2, 3][3, 4]$

الفترات الجزئية $[a, b]$	طول الفترة hi	mi	Mi	$himi$	$hiMi$
$[0, 1]$	1	0	3	0	3
$[1, 2]$**	1	3	4	3	4
**$[2, 3]$	1	3	4	3	4
$[3, 4]$	1	0	3	0	3
إي أن $L(\sigma, f) = -2, U(\sigma, f) = 6.25$		المجموع		$\sum himi = 6$	$\sum hiMi = 14$

3) $f: [1, 4] \to R$, $f(x) = 3x^2 + 2x$

إستخدام ثلاث تجزيئات متساوية $(a) \quad \sigma = (1, 2, 4) (b)$

الحـــــل:

$f'(x) = 6x + 2 \Rightarrow 6x + 2 = 0$

$6x = -2 \Rightarrow x = \frac{-1}{3} \notin [1, 4]$

$a) \quad \sigma = (1, 2, 4) \Rightarrow [1, 2], [2, 4]$

f' : ---------- $\frac{-1}{3}$ +++++++++++

الدالة متزايدة في $[1, 4]$

x	$f(x)$
1	$3 + 2 = 7$
2	$12 + 4 = 16$
3	$27 + 6 = 33$
4	$48 + 8 = 56$

الفترات الجزئية $[a,b]$	طول الفترة hi	mi	Mi	$himi$	$hiMi$
$[1,2]$	1	5	16	5	16
$[2,4]$	2	16	56	32	112
إي أن $L(\sigma,f)=37\,,U(\sigma,f)=128$			المجموع	$\sum himi=37$	$\sum hiMi=128$

(b) إستخدام ثلاث تجزيئات متساوية

$$h=\frac{b-a}{n}\Rightarrow h=\frac{4-1}{3}=1\Rightarrow \sigma=(1,2,3,4)\Rightarrow [1,2],[2,3],[3,4]$$

الفترات الجزئية $[a,b]$	طول الفترة hi	mi	Mi	$himi$	$hiMi$
$[1,2]$	1	5	16	5	16
$[2,3]$	1	16	33	16	33
$[3,4]$	1	33	56	33	56
إي أن $L(\sigma,f)=54\,,U(\sigma,f)=105$			المجموع	$\sum himi=54$	$\sum hiMi=105$

- إذا كانت $f:[a,b]\to R$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فأنه يوجد عدد وحيد K بحيث لأي تجزئة σ على الفترة $[a,b]$ فانه $L(\sigma,f)\le K\le U(\sigma,f)$
- نسمي العدد K التكامل المحدد للدالة f على الفترة $[a,b]$ ونرمز له ويقرأ التكامل من a الى b للدالة f ونسمي a , b حدي التكامل .

وتكون القيمة التقريبية للتكامل : $\int_a^b f(x)\,dx=\dfrac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}$

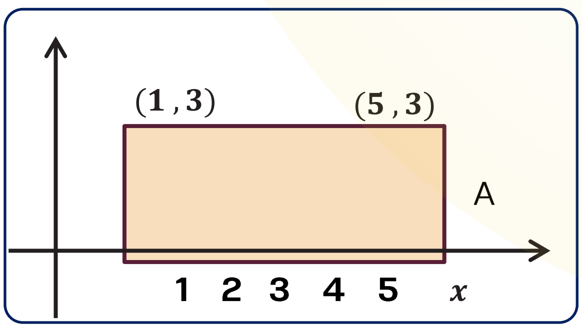
مثـــال :

لتكن $f:[1,5]\to R\; f(x)=3$, أوجد $\int_1^5 f(x)dx$.

نلاحظ ان المنطقة A هي منطقة مستطيلة طول قاعدتها $5-1=4$ وعرضها 3 .

$f(1)=3\;,\;f(5)=3\quad \therefore A=(4)(3)=12unit^2$

$\therefore \int_1^5 f(x)dx=12$



x	$f(x)$
1	3
3	3
5	3

الطريقـــة الثانيـــة

نأخذ $\sigma=(1,3,5)$

ونجد $L(\sigma,f)\,,\,U(\sigma,f)$ ثم نستخدم قانون التكامل

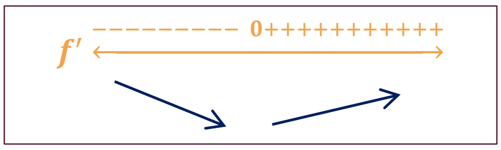
الفترات الجزئية $[a,b]$	طول الفترة hi	mi	Mi	$himi$	$hiMi$
$[1,3]$	2	3	3	6	6
$[3,5]$	2	3	3	6	6
			المجموع	$L(\sigma,f)=12$	$U(\sigma,f)=12$

$$\therefore \int_1^5 3dx=\frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}=\frac{12+12}{2}=\frac{24}{2}=12$$

مثـــال2 :

لتكن $f : [1 , 3] \rightarrow R$, $f(x) = x^2$ أوجد قيمة تقريبية للتكامل : $\int_1^3 x^2 dx$ إذا جزئت الفترة $[1 , 3]$ الى تجزئتين .

الحـــــل : $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1 , 3]$



الدالة متزايدة في الفترة $[1 , 3]$

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{2} = 1$ نأخذ $\sigma = (1 , 2, 3)$

و نجد $L(\sigma , f)$, $U(\sigma , f)$ ثم نستخدم قانون التكامل

الفترات الجزئية $[a , b]$	طول الفترة hi	mi	Mi	$himi$	$hiMi$
$[1 , 2]$	1	1	4	1	4
$[2 , 3]$	1	4	9	4	9
			المجموع	$L(\sigma , f) = 5$	$U(\sigma , f) = 13$

x	$f(x)$
1	1
2	4
3	9

$$\therefore \int_1^5 3dx = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2} = \frac{5 + 13}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

سؤال 1/2018 :

(2)لتكن $f(x) = 3x - 3$ $f : [1 , 4] \rightarrow R$, أوجد قيمة التكامل $\int_1^4 f(x)dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (1 , 2 , 3 , 4)$ ثم تحقق هندسياً بحساب مساحة المنطقة تحت منحني f .

الحـــــل : $\therefore$ لاتوجد نقاط حرجة $f'(x) = 3 \neq 0$

$\therefore$ الفترات الجزئية هي : $[1 , 2] , [2 , 3]$ $[3 , 4]$

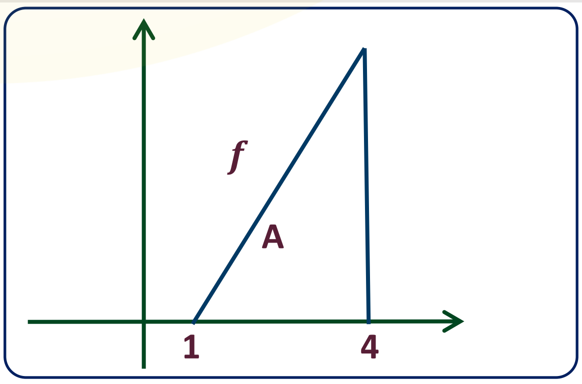
ونجد $L(\sigma , f)$, $U(\sigma , f)$ ثم نستخدم قانون التكامل

الفترات الجزئية $[a , b]$	طول الفترة hi	mi	Mi	$himi$	$hiMi$
$[1 , 2]$	1	0	3	0	3
$[2 , 3]$	1	3	6	3	6
$[3 , 4]$	1	6	9	6	9
			المجموع	$L(\sigma , f) = 9$	$U(\sigma , f) = 18$

x	$f(x)$
1	0
2	3
3	6
4	9

$$\therefore \int_1^4 (3x - 3)dx = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2} = \frac{9 + 18}{2} = \frac{27}{2} \ unit^2$$

للتحقق هندسيا : - نرسم الدالة بتحديد النقط $(1 , 0)$, $(4 , 9)$ ثم نرسم المثلث وكما في الشكل الأتي



$f(1) = 3 - 3 = 0$ $(1 , 0)$

$f(4) = 3(4) - 3 = 12 - 3 = 9$ $(4 , 9)$

مساحة $A = \frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع , $\therefore A = \frac{1}{2}(4 - 1)(9)$

$= \frac{1}{2}(3)(9) = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2} unit^2$

التكامـــــــل

مثـــال :

جد كلا من التكاملات التالية :-

1) $\int (x^2-5)^3\ 2x\,dx = \dfrac{(x^2-5)^4}{4} + c = \dfrac{1}{4}(x^2-5)^4 + c$

لاحظ $\dfrac{\text{الموجود هو } 2x}{\text{المطلوب هو } 2x}$

2) $\int (3x^2-9x+1)^{\frac{1}{2}}(2x-3)\,dx$

لاحظ $\dfrac{\text{الموجود هو } (2x-3)}{\text{المطلوب هو } (6x-9)}$ نضرب ونقسم في 3

$= \dfrac{1}{3}\int (3x^2-9x+1)^{\frac{1}{2}}(6x-9)\,dx \quad = \dfrac{1}{3}.\dfrac{(3x^2-9x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$

$= \dfrac{1}{3}.\dfrac{2}{3}(3x^2-9x+1)^{\frac{3}{2}} + c = \dfrac{2}{9}\sqrt{(3x^2-9x+1)^3} + c$

ملاحظـــــــــــــة

إذا كان تكامل حاصل ضرب قوسين ولم توجد علاقة بين القوسين (إي لايمثل أحد الاقواس مشتقة للقوس الاخر) فيجب فتح الاقواس وأجراء عملية التوزيع .

3) $\int (x^2+1)(2x-3)\,dx = \int (2x^3-3x^2+2x-3)\,dx$ يجب التخلص من الضرب

$= 2\times\dfrac{x^4}{4} - 3\times\dfrac{x^3}{3} + 2.\dfrac{x^2}{2} - 3x + c \quad = \dfrac{1}{2}x^4 - x^3 + x^2 - 3x + c$

ملاحظـــــــــــــة

لأيجاد التكاملات للدوال التى تكون تحت الجذور فتقسم الى ثلاث حالات

الحالة الأولى :- إذا كانت الدالة التي داخل الجذر تحتوي على تحليل بالعامل المشترك ويكون الأس من نفس رتبة الدليل أو من مضاعفاته فأننا نقوم بالتحليل بالعامل المشترك و نوزع الجذر ثم نتخلص من الجذر بالداخل على الخارج ونكمل الحل

4) $\int \sqrt[3]{x^5+x^3}\,dx = \int \sqrt[3]{x^3(x^2+1)}\,dx$ استخراج x^3 عامل مشترك

$= \int \sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x^2+1}\,dx = \int x.\sqrt[3]{x^2+1}\,dx \qquad \sqrt[3]{x^3} = x$

$= \dfrac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{\frac{1}{3}}\,dx$

لاحظ $\dfrac{\text{الموجود هو } 2x}{\text{المطلوب هو } 2x}$

$= \dfrac{1}{2}\times\dfrac{(x^2+1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}(x^2+1)^{\frac{4}{3}} + c$

$= \dfrac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)^4} + c$

الحالة الثانية :- إذا كان داخل الجذر حدودية ثلاثية يمكن تحليلها الى المربع الكامل فأننا نقوم بالتحليل الحدودية داخل الجذر بالمربع الكامل ثم نتخلص من الجذر بالداخل على الخارج ثم نكمل الحل

تذكير بشروط المربع الكامل $(x^2 \pm 2ax + a^2)$:-

1 يجب أن كل من يكون الحد الأول والثالث موجباً ومربعاً
2 يجب أن يكون الحد الثاني (الوسط) ناتج من ضعف جذرالأول في جذر الثالث

فمثلا

$\sqrt{x^2} \quad x^2 \pm 10x + 25 \quad \sqrt{25} \quad \Rightarrow \quad (x\pm5)^2$

$x \longrightarrow 2\times5\times x \longleftarrow 5$

5) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[5]{x^2-14x+49}}$

$= \int \dfrac{dx}{\sqrt[5]{(x-7)^2}} = \int \dfrac{dx}{(x-7)^{\frac{2}{5}}}$

$= \int (x-7)^{\frac{-2}{5}}\,dx$

لاحظ $\dfrac{\text{الموجود هو } 1}{\text{المطلوب هو } 1}$

$= \dfrac{5}{3}\ (x-7)^{\frac{3}{5}} + c = \dfrac{5}{3}.\sqrt[5]{(x-7)^3} + c$

الحالة الثالثة :- إذا كان الجذر لاتنطبق عليه الحالة الأولى والثانية فأننا نستخدم قاعدة الداخل على الخارج ثم نستخدم طريقة الموجود والمطلوب

$6)\ \int (x-1)\sqrt[7]{(x^2-2x)^4}\,dx$

$\dfrac{\text{الموجود هو } (x-1)}{\text{المطلوب هو } (2x-2)}$ نضرب ونقسم في 2

$$= \int (x-1)(x^2-2x)^{\frac{4}{7}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 2(x-1)(x^2-2x)^{\frac{4}{7}}\,dx \quad = \frac{1}{2}\times\frac{(x^2-2x)^{\frac{11}{7}}}{\frac{11}{7}}+c$$

$$= \frac{7}{22}(x^2-2x)^{\frac{11}{7}}+c \qquad = \frac{7}{22}\sqrt[7]{(x^2-2x)^{11}}+c$$

ملاحظـــــــــــــة

لأيجاد التكاملات للدوال الكسرية فتقسم الى ثلاث حالات

الحالة الأولى :- إذا كان الكسر يحتوي على تحليل فعندها نحلل الحدود القابلة للتحليل ثم نختصر ونكمل الحل

$$f)\ \int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}dx = -\int_2^3 \frac{x^3-1}{x-1}dx = -\int_2^3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx$$

$$= -\int_2^3 (x^2+x+1)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_2^3$$

الحالة الثانية :- إذا كان الكسر يحتوي في البسط على حدودية (أكثر من حد) والمقام على حد جبري (حد واحد) فعندها نقوم بتجزئة الكسر وتوزيع المقام على جميع الكسور المجزئة ثم نكمل الحل

$7)\ \int \frac{(3x^2-4)^2-16}{x^2}dx$

$$= \int \frac{9x^4-24x^2+16-16}{x^2}dx \quad = \int \frac{9x^4-24x^2}{x^2}dx = \int \frac{9x^4}{x^2}-\frac{24x^2}{x^2}dx$$

$$= \int (9x^2-24)\,dx = 9\times\frac{x^3}{3}-24x+c \quad = 3x^3-24x+c$$

الحالة الثالثة :- إذا كان الكسر يحتوي على قوس مرفوع الى أس في المقام بطريقة مباشرة أو غير مباشرة مثل الجذور أو حدودية تمثل مربعا كاملا فأننا نرفع المقام للبسط مع تغير أشارة الأس ونحل بطريقة الموجود والمطلوب

$8)\ \int \frac{x+1}{(x^2+2x)^2}dx$

لاحظ $\dfrac{\text{الموجود هو } (x+1)}{\text{المطلوب هو } (2x+2)}$ نضرب ونقسم في 2

$$= \int (x+1)(x^2+2x)^{-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 2x(x^2+2x)^{-2}\,dx = \frac{1}{2}\times\frac{(x^2+2x)^{-1}}{-1}+c = \frac{-1}{2(x^2+2x)}+c$$

$1)\ \int \sin g(x)\times g'(x)dx = -\cos g(x)+c$

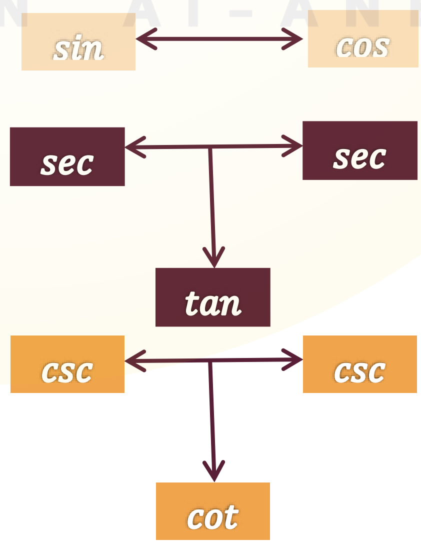
$2)\ \int \cos g(x)\times g'(x)dx = \sin g(x)+c$

$3)\ \int \sec^2 g(x)\times g'(x)dx = \tan g(x)+c$

$4)\ \int \csc^2 g(x)\times g'(x)dx = -\cot g(x)+c$

$5)\ \int \tan g(x)\sec g(x)\times g'(x)dx = \sec g(x)+c$

$6)\ \int \cot g(x)\csc g(x)\times g'(x)dx = -\csc g(x)+c$



مثـــال :

جد كلا من التكاملات التالية :-

لاحظ $\dfrac{\text{الموجود هو } 2x}{\text{المطلوب هو } 2x}$
$\dfrac{\text{الموجود هو } (1)}{\text{المطلوب هو } (3)}$ نضرب ونقسم في 3

$1)\ \int \sin x^2\ 2xdx = -\cos x^2+c$

$2)\ \int \cos 3x\ dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x\ 3dx$

$$= \frac{1}{3}\sin 3x+c$$

3) $\int sec^2(2x)\,dx = \frac{1}{2}tan\,2x + c$

4) $\int csc^2(5x-13)\,dx = -\frac{1}{5}cot(5x-13) + c$

5) $\int tan\left(\frac{3}{2}x\right)sec\left(\frac{3}{2}x\right)dx = \frac{2}{3}sec\left(\frac{3}{2}x\right) + c$

6) $\int cot\left(\frac{1}{3}x\right)csc\left(\frac{1}{3}x\right)dx = -3\,csc\left(\frac{1}{3}x\right) + c$

النظرية الاساسية للتكامل ـ الدالة المقابلة:

- تسمى F الدالة المقابلة للدالة f وعلى الفترة $[a\,,b]$.

ملاحظـــــــــة

لأثبات أن الدالة $F(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$ على الفترة $[a\,,b]$ يجب تحقق الشروط الثلاثة الأتية:-

(1) $F(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a\,,b]$

(2) $F(x)$ دالة قابلة للأشتقاق على الفترة $(a\,,b)$

(3) $F'(x) = f(x)\quad,\quad \forall\, x \in (a\,,b)$

مثــال:

أثبت ان الدالة $F(x) = \frac{1}{2}sin\,2x$, $F : R \to R$ هي دالة مقابلة للدالة: $f(x) = cos\,2x$, $f : R \to R$ ثم جد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos\,2x\,dx$

$\because F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R (لانها من الدوال الدائرية)

$\therefore$ (1) $F(x)$ هي دالة مستمرة على R

(2) قابلة للاشتقاق على R

(3) $\because F'(x) = \frac{1}{2}\cos 2x\,(2) = \cos 2x = f(x)\quad \forall x \in R$

$\therefore F$ هي دالة مقابلة للدالة f على R

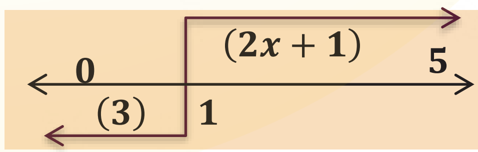
$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos\,2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\,sin\,2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)sin\frac{\pi}{2}\right] - \left[\left(\frac{1}{2}\right)sin\,0\right]$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)(1) - \left(\frac{1}{2}\right)(0) = \frac{1}{2}$$

إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a\,,b]$ وكانت $c \in (a\,,b)$ فان:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

مثــال:

إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ,\forall\ x \geq 1 \\ 3 & ,\forall\ x < 1 \end{cases}$ فأوجد $\int_0^5 f(x)dx$



$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ,\forall\ x \geq 1 \\ 3 & ,\forall\ x < 1 \end{cases}$$

الدالة مستمرة ولها قاعدتان ونلاحظ أن $1 \in [0,5]$ كما موضح بخط الأعداد لذلك نجزء التكامل الى فترتين وهما $[0,1], [1,5]$ أي تكامل اليسار زائد تكامل اليمين

أثبات الأستمرارية عند $x = 1$

نبحـث استمـرارية الدالـة عنـد الحـد الفاصـل بين جزئـي الدالـة وهو $x = 1$

(1) $f(1) = 2(1) + 1 = 3$

(2) $\lim_{x\to1} f(x) = \begin{cases} L_1 = \lim_{x\to1}(2x+1) = 2+1 = 3 = L_1 & \text{غاية اليمين} \\ L_2 = \lim_{x\to1}(3) = 3 = L_2 & \text{غاية اليسار} \end{cases}$

$L_1 = L_2$ الغاية موجودة

(3) $\because\ f(1) = \lim_{x\to1} f(x) \quad\Rightarrow\quad \therefore$ الدالة مستمرة

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^1 (3)dx + \int_1^5 (2x+1)dx = [\,3x\,]_0^1 + [\,x^2+x\,]_1^5$$
$$= [\,(3)+(0)] + [\,(25+5)-(1+1)] = [3] + [28] = 31$$

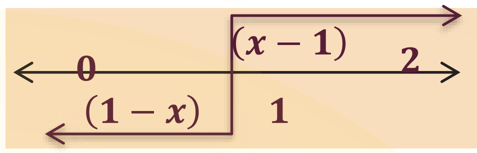
مثـــال :

(1) إحسب كلا من التكاملات الآتية :

$d)\ \int_0^2 |x-1|dx$

$$f(x) = |\,x-1\,| = \begin{cases} (x-1) & ,\forall\, x-1 \ge 0 \\ -(x-1) & ,\forall\, x-1 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = |\,x-1\,| = \begin{cases} x-1 & ,\forall\, x \ge 1 \\ 1-x & ,\forall\, x < 1 \end{cases}$$



الدالة مستمرة ولها قاعدتان ونلاحظ أن $1 \in [0,2]$ كما موضح بخط الأعداد لذلك نجزء التكامل الى فترتين وهما $[0,1], [1,2]$ أي تكامل اليسار زائد تكامل اليمين

$$\int_0^2 |x-1|dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx = \ [x-\frac{x^2}{2}]_0^1 + [\frac{x^2}{2}-x]_1^2$$
$$= \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)-0\right] + \left[(2-2)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right] = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

مثـــال :

(2) أثبت أن $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ حيث :

$F(x) = \sin x + x$ حيث $F\colon \left[\,0\,,\frac{\pi}{6}\right] \to R$

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx$ ثم أحسب $f\colon\ \left[\,0\,,\frac{\pi}{6}\right] \to R$ حيث $f(x) = \cos x + 1$

1 $F(x)$ دالة مستمرة على R لأنها من الدوال الدائرية لذلك تكون مستمرة على الفترة $\left[\,0\,,\frac{\pi}{6}\right]$

2 $F(x)$ دالة قابلة للأشتقاق على R لأنها من الدوال الدائرية لذلك تكون قابلة للأشتقاق على الفترة المفتوحة $\left(0\,,\frac{\pi}{6}\right)$

3 $\therefore\ F'(x) = \cos x + 1 = 1 + \cos x = f(x)$

$\therefore$ F هي دالة مقابلة للدالة f

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) = \left[\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right] - [\,\sin 0 + 0] = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{6} = \frac{3+\pi}{6}$$

أختبـــــر نفسك في الأسئلة الوزاريـــــة

(1997)	جد التكامل $\int_4^8 x\sqrt{x^2-15}\ dx$	$[Ans\colon\ 114]$
(1998)	إذا كان $\int_{-1}^{a} (x-x^3)\ dx\ = \frac{-9}{4}$ فجد قيمة a	$[Ans\colon a = 2\ ]$
(1999)	إذا كان $\int_a^b (2x+3)dx = 12$ وكان $a+2b=3$ فجد $a,b \in R$	$\left[\begin{matrix} Ans\colon & a=-1\,,b=2 \\ or & a=-7\,,b=5 \end{matrix}\right]$
2002/2005 (/2000/	جد التكامل $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\ dx$	$\left[Ans\colon\ \frac{98}{3}\right]$
(2001)	جد قيمة $\int_0^4 \sqrt{x^2+5x}\ (2x+5)\ dx$	$[Ans\colon\ 144\ ]$
2001	جد $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{9-12x+4x^2}$	$\left[Ans\colon\ \frac{2}{5}\right]$
(2003)	جد $\int_0^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2}$	$\left[Ans\colon\ \frac{1}{3}\right]$
(2004)	جد التكامل $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^3-2x^5}\ dx$	$[Ans\colon\ 0]$
2004	إذا كانت $\int_a^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\ dx = 2$ فجد قيمة a	$[Ans\colon\ a=0]$
(2006)	جد $\int_1^2 \frac{1}{(5-2x)^2} dx$	$\left[Ans\colon\ \frac{1}{3}\right]$
(2006)	جد $\int_1^2 \frac{1}{(3x-4)^2} dx$	$\left[Ans\colon\ \frac{-1}{2}\right]$

(2007)	جد $\int x\,(x^2+1)^{\frac{3}{4}}\,dx$	$\left[Ans:\ \frac{2}{7}(x^2+1)^{\frac{7}{4}}+c\right]$
(2008)	جد $\int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$	$\left[Ans:\ \frac{9}{2}\right]$
(2010)	إذا كان $\int_1^3 g(x)dx=2\ ,\ \int_1^3 f(x)dx=6$ فجد $\int_1^3[f(x)-g(x)+4x]dx$	
(2010)	جد $\int (4x+6)\sqrt{2x+3}\ dx$	$\left[Ans:\ \frac{2}{5}\sqrt{(2x+3)^5}+c\right]$
(2011)	جد $\int_{-3}^{4}\lvert x\rvert\,dx$	$\left[Ans:\ 12\frac{1}{2}\right]$
(2014)	إذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x^2, & \forall x\ge 0\\ 2x\ , & \forall x<0\end{cases}$ فجد $\int_{-1}^{3} f(x)dx$	$[Ans:\ 26\ ]$
(2015)	جد تكامل كل من : $1)\ \int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}}\,dx$	
(2017 ح)	أثبت أن : $F(x)=1-\cos x$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)=\sin x$ حيث أن $F:[1,3]\to R$ حسب المبرهنة الأساسية للتكامل : $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx$	$\left[Ans:\ \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right]$
(2018 ط3)	إذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x & ,\ \forall x\ge 3\\ 6 & ,\ \forall x<3\end{cases}$ فجد $\int_{-1}^{4} f(x)dx$	

النظرية الاساسية للتكامل ـ الدالة المقابلة :

التكامل غير المحدد

$1)\ \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\quad ,\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}\quad ,\quad \sec x=\frac{1}{\cos x}\quad ,\quad \csc x=\frac{1}{\sin x}$

$2)\ \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)$

$3)\ \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)$

- نستخدم العلاقة (2) عادة عندما يحتوي التكامل على $\sin^4 x\ ,\ \sin^2 x$ ولا توجد مشتقة داخل القوس من ضمن التكامل , وكذلك نستخدم العلاقة (3) عادة عندما يحتوي التكامل على $\cos^4 x\ ,\ \cos^2 x$ ولا توجد مشتقة داخل القوس من ضمن التكامل

$3)\ \sec^2 x-\tan^2 x=1\ \Rightarrow \begin{cases}\sec^2 x=1+\tan^2 x\\ \text{و}\\ \tan^2 x=\sec^2 x-1\end{cases}$

$\csc^2 x-\cot^2 x=1\ \Rightarrow \begin{cases}\csc^2 x=1+\cot^2 x\\ \text{و}\\ \cot^2 x=\csc^2 x-1\end{cases}$

$4)\ \sin^2 x+\cos^2 x=1\ \Rightarrow \begin{cases}\sin^2 x=1-\cos^2 x\\ \text{و}\\ \cos^2 x=1-\sin^2 x\end{cases}$

- نستخدم العلاقة (4) عادة عندما يحتوي التكامل على $\cos^3 x\ ,\ \sin^3 x$ ولا توجد مشتقة داخل القوس من ضمن التكامل فمثلا

$\int \sin^3 x\,dx=\int \sin x\sin^2 x\,dx=\int \sin x\,(1-\cos^2 x)\,dx$

$=\int(\sin x-\sin x\cos^2 x)\,dx=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+c$

$5)\ \sin 2x=2\sin x\cos x$

$\cos 2x=\begin{cases}\cos^2 x-\sin^2 x\\ \cos^2 x-\sin^2 x=\cos^2 x-(1-\cos^2 x)=2\cos^2 x-1\\ \cos^2 x-\sin^2 x=(1-\sin^2 x)-\sin^2 x=1-2\sin^2 x\end{cases}$

تكامل الدوال المثلثية التربيعية:

$1)\ \int \sin^2 x\,dx=\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+c$

$2)\ \int \cos^2 x\,dx=\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$

$3)\ \int \tan^2 x\,dx=\int(\sec^2 x-1)\,dx=\tan x-x+c$

$4)\ \int \cot^2 x\,dx=\int(\csc^2 x-1)\,dx=-\cot x-x+c$

$5)\ \int \sec^2 x\,dx=\tan x+c \qquad 6)\ \int \csc^2 x\,dx=-\cot x+c$

ملاحظـــــة

إذا كانت الدالة بالشكل $sec^n x \tan x$ بشرط تساوي الزوايا فعندئذ نجزئ دالة $sec^n x \tan^1 x$ الى $sec^{n-1} x \sec x \tan x$ لان $\sec x \tan x$ هي مشتقة $\sec x$ وتحل بالموجود والمطلوب.

$$1)\ \int sec^5 x \tan x\, dx = \int sec^4 x . \sec x \tan x\, dx$$
$$= \int (\sec x)^4 . \sec x \tan x\, dx = \frac{1}{5} sec^5 x + c$$

ملاحظـــــة

إذا كانت الدالة بالشكل التالي $\sin ax . \cos 2ax$ أو $\sin 2ax . \cos ax$ فيجب أن نساوي الزوايا قبل التكامل وذلك بتطبيق احدى القوانين ضعف الزاوية :

$1)\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $2)\ sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$$2)\ \int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx = \int \frac{cos^2 2x - sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$
$$= \int \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$
$$= \int (\cos 2x + \sin 2x)\, dx = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + c$$

- نستخدم العلاقة (2) عادة عندما يحتوي التكامل على $sin^4 x$, $sin^2 x$ ولا توجد مشتقة داخل القوس من ضمن التكامل , وكذلك نستخدم العلاقة (3) عادة عندما يحتوي التكامل على $cos^4 x$, $cos^2 x$ ولا توجد مشتقة داخل القوس من ضمن التكامل

$$3)\ \int sin^4 x\, dx = \int (sin^2 x)^2\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4} cos^2 2x\right) dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right)\right) dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx = \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx$$
$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

ملاحظـــــة

إذا كانت الدالة $\sin x$ أو $\cos x$ مرفوعة الى أس فردي (أكبر من واحد) نجزئه بالشكل التالي $sin^{2n} x$, $sin^1 x$ (أو $cos^{2n} x$, $cos^1 x$) ثم نستخدم القوانين التالية $1)\ cos^2 x = 1 - sin^2 x$ $\quad 2) sin^2 x = 1 - cos^2 x$

$$4)\ \int cos^3 x\, dx = \int \cos x\, cos^2 x\, dx = \int \cos x\,(1 - sin^2 x) dx$$

ملاحظـــــة

إذا كانت $sin^n x\, cos^n x$ أي مرفوعات الى نفس الاس مع تساوي الزوايا فيجب أن تكتب بهذا الشكل $(\sin x \cos x)^n$ ثم نطبق القانون التالي : $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

$$5)\ \int sin^2 x\, cos^2 x\, dx = \int (\sin x \cos x)^2 dx = \int (\frac{1}{2}\sin 2x)^2 dx$$
$$= \int \frac{1}{4} sin^2 2x\, dx = \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

ملاحظـــــة

إذا كانت الدالة بالشكل التالي $\sin x \cos x$ بحيث أن احدهما مرفوعة لأس زوجي والاخرى مرفوعة لأس فردي فيجب أن نجزئ الأس الفردي فقط ثم نستعمل القوانين التالية (بشرط تساوي الزوايا).

$1)\ cos^2 x = 1 - sin^2 x$, $\quad 2) sin^2 x = 1 - cos^2 x$

$$6)\ \int sin^3 x\, cos^2 x\, dx = \int sin^2 x \sin x\, cos^2 x\, dx$$
$$= \int (1 - cos^2 x) \sin x\, cos^2 x\, dx = \int (\sin x\, cos^2 x - \sin x\, cos^4 x)\, dx = \frac{-1}{3} cos^3 x + \frac{1}{5} cos^5 x + c$$

$$7)\ \int \frac{(3 - \sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}} dx = \int \frac{(3 - \sqrt{5}x^{\frac{1}{2}})^7}{\sqrt{7}x^{\frac{1}{2}}} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \int x^{\frac{-1}{2}} \left(3 - \sqrt{5}x^{\frac{1}{2}}\right)^7 dx$$

لاحظ $\dfrac{\text{الموجود}\ \ x^{\frac{-1}{2}}}{\text{المطلوب}\ \ \frac{-\sqrt{5}}{2} x^{\frac{-1}{2}}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \times \frac{-2}{\sqrt{5}} \int \frac{-\sqrt{5}}{2} x^{-\frac{1}{2}}(3-\sqrt{5}x^{\frac{1}{2}})^7\,dx = \frac{-2}{\sqrt{35}} \times \frac{(3-\sqrt{5}x^{\frac{1}{2}})^8}{8} + c = \frac{-1}{4\sqrt{35}}\left(3-\sqrt{5}x^{\frac{1}{2}}\right)^8 + c$$

8) $$\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x}{1-\sin x}dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{1-\sin x}dx$$
$$= \int \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)\cos x}{1-\sin x}dx = \int (\cos x + \sin x \cos x)\,dx$$
$$= \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + c \quad = \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + c$$

9) $$\int \csc^2 x \cos x\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \times \cos x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\sin x}dx$$
$$= \int \cot x \csc x\,dx \quad = -\csc x + c$$

10) $$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx = \int \frac{\sqrt{x^{\frac{1}{2}}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}dx = \int \frac{\sqrt{x^{\frac{1}{2}}}.\sqrt{\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)}}{x^{\frac{3}{4}}}dx$$
$$= \int x^{-\frac{3}{4}}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}dx = \int x^{-\frac{3}{4}}x^{\frac{1}{4}}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}dx$$
$$= \int x^{\frac{-1}{2}}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}dx = -2\int \frac{-1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{-4}{3}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

أختبـــــر نفسك في الأسئلة الوزاريــــــة

2009	جد $\int \tan 3x \ \sec^5 3x\,dx$	$\left[Ans: \frac{1}{15} \sec^5 3x + c\right]$
(2010)	جد $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x + \cos x)^2 dx$	$\left[Ans: \frac{\pi}{2} + 1\right]$
(2014/2010)	جد $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}dx$	$\left[Ans: \frac{1}{2}(1-\sin x)^2 + c \ ; \ \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + c\right]$
(2014/2013)	جد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx$	$\left[Ans: \frac{1}{2}\right]$
(2015/2014)	جد $\int (\sin 6x \ \cos^2 3x)\,dx$	$\left[Ans: \frac{-1}{6} \cos^4 3x + c\right]$
(2016)	جد التكاملات الأتية : $2) \int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x}dx$	
(2016)	جد قيمة : $1) \int \frac{dx}{\sqrt{2x}\sqrt{3+\sqrt{x}}}$	
(ط 2017)	جد التكاملات الأتية $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x}dx$	$\left[\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + c\right]$
(ط1 2018)	جد التكاملات الأتية $1) \int_4^0 x(x-1)(x-2)dx \quad 2) \int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}d$	
(ج2 2018)	جد التكاملات الأتية $1) \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}}dx \quad 2) \int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}dx$	
(ط2 2018)	جد قيمة $a \in R$ إذاعلمت أن : $\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \ dx$	
(ج3 2018)	جد قيمة التكامل $\int_{-1}^{4}[8-2f(x)]\,dx$, أذا كان $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = 2$	

The Natural Logarithmic : اللوغاريتم الطبيعي

المشتقة : لتكن $g(x)$ دالة موجبة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x فان مشتقة اللوغاريتم الطبيعي للدالة $g(x)$ [$Ln\ g(x)$] هي:

$$f(x) = Ln\left(g(x)\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

مثال:

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال الاتية :-

$$1)\ y=(ln|x|)^4 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=4(ln\,x)^3\times\frac{1}{x}=\frac{4(ln\,x)^3}{x}$$

$$2)\ y=ln(3x^2+4)^3 \Rightarrow y=3\,ln(3x^2+4) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=(3)\frac{6x}{3x^2+4}$$

تكامل دالة اللوغاريتم الطبيعي:

- بما أن التكامل عكس الأشتقاق فهذا يعني أن:

$$\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx=Ln\,|\,g(x)\,|+c$$

مثال:

جد ناتج كل من التكاملات الأتية :-

$$1)\int\frac{1}{4x}dx=\frac{1}{4}\int\frac{4}{4x}dx=\frac{1}{4}ln|4x|+c \qquad \Leftarrow \qquad \frac{\text{الموجود } 1}{\text{المطلوب } 4}$$

$$2)\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx \qquad \Leftarrow \qquad \frac{\text{الموجود } \sin x}{\text{المطلوب } -\sin x}$$

$$=-\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx=-ln|\cos x|+c=ln(\cos x)^{-1}+c$$

$$=ln\left|\frac{1}{\cos x}\right|+c=ln|\sec x|+c$$

الدالة الأسية (e^x) : هي عكس دالة اللوغاريتم الطبيعي ويرمز لها بالرمز (e^x)

مشتقة الدالة الأسية : (إي مشتقة $e^{g(x)}$ = الدالة نفسها $e^{g(x)}$ × مشتقة الأس$(g'(x))$) أي أن

$$f(x)=e^{g(x)}\Rightarrow f'(x)=e^{g(x)}\times g'(x)$$

سؤال

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال الاتية :-

$$1)\ y=e^{\tan x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=e^{\tan x}\times sec^2 x=sec^2x\ e^{\tan x}$$

$$2)\ y=e^{x^2+x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=e^{x^2+x}\times(2x+1)=(2x+1)\,e^{x^2+x}$$

$$3)\ f(x)=e^{(x^2+1)^4}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=e^{(x^2+1)^4}\times4(x^2+1)^3(2x)$$

$$=8x(x^2+1)^3\,e^{(x^2+1)^4}$$

تكامل الدالة الأسية e^x:

$$\int e^{g(x)}g'(x)\,dx=e^{g(x)}+c$$

$$1)\int xe^{x^2}dx=\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}+c \qquad \Leftarrow \qquad \frac{\text{الموجود } x}{\text{المطلوب } 2x}$$

$$2)\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int e^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\int e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=2e^{\sqrt{x}}+c \qquad \Leftarrow \qquad \frac{\text{الموجود } \frac{1}{\sqrt{x}}}{\text{المطلوب } \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

الدالة الأسية للأساس a^x :

$f(x)=a^x$ تسمى دالة أسية أساسها العدد a وأسها x حيث أن: $a\neq1\,,a>0\,,f:R\to R^+$ و أن $a^u=$ إذا كان a عددا موجبا فأن فان $e^{u\ln a}$ فتكون مشتقتها

$$y=a^{g(x)}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=a^{g(x)}g'(x)\,ln\,a$$

مثال:

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال الاتية :-

$$1)\ y=3^{2x-5}\quad\Rightarrow\frac{dy}{dx}=3^{2x-5}.(2).ln\,3\quad\Rightarrow\frac{dy}{dx}=2\,ln\,3\,.\,3^{2x-5}$$

$$2)\ y=5^{\sin x}\quad\Rightarrow\frac{dy}{dx}=5^{\sin x}.\cos x.ln\,5\quad\Rightarrow\frac{dy}{dx}=ln\,5\,.\,5^{\sin x}\cos x$$

تكامل الدالة الأسيـــة a^x:

$$\boxed{\int a^{g(x)} g'(x)\,dx = a^{g(x)} \times \frac{1}{\ln a} + c \quad , a \in R}$$

مثال :

جد ناتج كل من التكاملات الآتية

1) $\int x5^{x^2}\,dx = \int x5^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x5^{x^2}\,dx = \frac{1}{2\ln 5}e^{x^2} + c \Leftarrow \frac{x \text{ الموجود}}{2x \text{ المطلوب}}$

2) $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int 2^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\int 2^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2\frac{2^{\sqrt{x}}}{\ln 5} + c \Leftarrow \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ الموجود}}{\frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ المطلوب}}$

مثال :

2) جد التكاملات الاتية :-

a) $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\ln 3}^{\ln 5} 2e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_{\ln 3}^{\ln 5} = \frac{1}{2}\left[e^{2\ln 5} - e^{2\ln 3}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[e^{\ln 5^2} - e^{\ln 3^2}\right] = \frac{1}{2}(25-9) = \frac{1}{2}(16) = 8$

b) $\int_0^{\ln 2} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{\ln 2} = -\left[e^{-x}\right]_0^{\ln 2} = -\left(e^{-\ln 2} - e^0\right)$

$= -\left(e^{\ln 2^{-1}} - 1\right) = -(2^{-1}-1) = -\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{2}$

c) $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}dx = \left[\ln(x^3+4x+1)\right]_0^1 \Leftarrow \frac{3x^2+4 \text{ الموجود}}{3x^2+4 \text{ المطلوب}}$

$= \left[\ln(x^3+4x+1)\right]_0^1 = = [\ln(1+4+1)] - [\ln 1]$

$= \ln 6 - 0 = \ln 6$

d) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2+\tan x}dx = \left[\ln|2+\tan x|\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \Leftarrow \frac{\sec^2 x \text{ الموجود}}{\sec^2 x \text{ المطلوب}}$

$= \left[\ln|2+\tan x|\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \left[\ln|2+\tan\frac{\pi}{4}|\right] - \left[\ln|2+\tan -\frac{\pi}{4}|\right]$

$= [\ln|2+1|] - [\ln|2-1|] = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3 - 0 = \ln 3$

e) $\int \cot^3 5x\,dx = \int (\cot^2 5x).\cot 5x\,dx$

$= \int (\csc^2 5x - 1)\cot 5x\,dx = \int (\csc^2 5x \cot 5x - \cot 5x)\,dx$

$= \int (\csc^2 5x \cot 5x - \cot 5x)\,dx = \int \left(\csc^2 5x \cot 5x - \frac{\cos 5x}{\sin 5x}\right)dx$

$= \frac{-1}{5}.\frac{\cot^2 5x}{2} - \frac{1}{5}\ln|\sin 5x| + c = \frac{-1}{10}\cot^2 5x - \frac{1}{5}\ln|\sin 5x| + c$

مثال :

(3) أن أثبت :-

a) $\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 2$

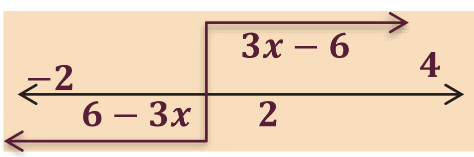
الطرف الأيسر $= \int_1^8 x^{\frac{-2}{3}}(x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}}\,dx = 3\int_1^8 \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}(x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}}\,dx \quad \frac{x^{\frac{-2}{3}} \text{ الموجود}}{\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} \text{ المطلوب}}$

$= 3\left[3\frac{(x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^8 = 2\left[\sqrt{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^3}\right]_1^8 = 2\left[\sqrt{\left(\sqrt[3]{8}-1\right)^3} - \sqrt{\left(\sqrt[3]{1}-1\right)^3}\right]$

$= 2\left[\sqrt{(2-1)^3} - \sqrt{(1-1)^3}\right] = 2[\sqrt{1}-\sqrt{0}] = 2(1) = 2$ الطرف الايمن

b) $\int_{-2}^4 |3x-6|\,dx = 30 \Rightarrow |3x-6| = \begin{cases} 3x-6 & if \quad 3x-6 \geq 0 \\ 6-3x & if \quad 3x-6 < 0 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} 3x-6 & if \;\; x \geq 2 \\ 6-3x & if \;\; x < 2 \end{cases}$



- الدالة مستمرة ولها قاعدتان ونلاحظ أن $2 \in [-2,4]$ كما موضح بخط الأعداد لذلك نجزء التكامل الى فترتين وهما $[-2,2],[2,4]$ أي تكامل اليسار زائد تكامل اليمين

$$\int_{-3}^{4} f(x)dx = \int_{-2}^{2}(6-3x)dx + \int_{2}^{4}(3x-6)dx$$
$$= \left[6x - \frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{3}{2}x^2 - 6x\right]_{2}^{4}$$
$$= \left[\left(12 - \frac{3}{2}(4)\right) - \left(-12 - \frac{3}{2}(2)\right)\right] + \left[\left(\frac{3}{2}(16) - 24\right) - \left(\frac{3}{2}(4) - 12\right)\right]$$
$$= [(12-6) - (-12-6)] + [(24-24) - (6-12)]$$
$$= (6+18) + (0+6) = 30$$ الطرف الايمن

مثال :

4) $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2,6]$ فإذا كان $\int_1^6 f(x)\,dx = 6$ وكان $\int_{-2}^{6}[f(x)+3]\,dx = 32$ فجد $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$

$$\int_{-2}^{6}[f(x)+3]\,dx = 32 \Rightarrow \int_{-2}^{6} f(x)dx + \int_{-2}^{6} 3\,dx = 32$$
$$\therefore \int_{-2}^{6} f(x)dx = 32 - \int_{-2}^{6} 3\,dx$$
$$\text{but} \int_{-2}^{6} f(x)dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{6} f(x)\,dx \qquad \text{and} \qquad \int_{1}^{6} f(x)\,dx = 6$$
$$\therefore 32 - \int_{-2}^{6} 3\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + 6 \Rightarrow \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 32 - \int_{-2}^{6} 3\,dx - 6$$
$$\therefore \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 32 - [\,3x\,]_{-2}^{6} - 6 = 32 - [18+6] - 6 = 32 - 24 - 6 = 2$$

مثال :

5) جد قيمة $a \in R$ إذا علمت أن :- $\int_1^a (x + \frac{1}{2})\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2 x\,dx$

$$\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_1^a = 2[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$\frac{1}{2}\,[x^2 + x]_1^a = 2[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} \qquad \times 2$$
$$[(a^2+a) - (1+1)] = 4\left[\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right] \Rightarrow (a^2+a) - 2 = 4(1-0)$$
$$(a^2+a) - 2 = 4 \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Rightarrow (a+3)(a-2) = 0$$
$$\therefore a = -3 \quad or \quad a = 2$$

مثال :

6) لتكن $f(x) = x^2 + 2x + k$ حيث $k \in R$ دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5) جد :- $\int_1^3 f(x)\,dx$

$$f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

$\therefore$ $(-1,-5)$ نهاية صغرى محلية وتحقق المعادلة

$$-------\ -1\ ++++++++++$$

$$-5 = (-1)^2 + 2(-1) + k \Rightarrow k = -5 + 1 = -4$$ ن.ص

$$\therefore f(x) = x^2 + 2x - 4$$
$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (x^2 + 2x - 4)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4x\right]_1^3$$
$$= \left[\left(\frac{1}{3}(27) + 9 - 12\right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 4\right)\right]$$
$$= \left[(9-3) - \left(\frac{1}{3} + -3\right)\right] = 6 - \left(\frac{1}{3} - 3\right) = 6 + 3 - \frac{1}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

مثال :

7) إذا كان للمنحني $f(x) = (x-3)^3 + 1$ نقطة انقلاب (a,b) جد القيمة العددية للمقدار $\int_0^b f'(x)\,dx - \int_0^a f''(x)dx$

الحـــل : $\because$ الدالة تمتلك نقطة انقلاب $\quad f'(x) = 3(x-3)^2 \Rightarrow f''(x) = 6(x-3)$

$$\therefore\ f''(x) = 0 \Rightarrow 6(x-3) = 0 \overset{\div 6}{\Rightarrow} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$
$$\therefore\ f(3) = (3-3)^3 + 1 = 1$$

اشارة $f''(x)$ $\quad ----\ 3\ ++++$

تقعر $\quad$ تحدب

$(3,1)$ نقطة انقلاب

$$\text{المقدار} = \int_0^1 3(x-3)^2\,dx - \int_0^3 6(x-3)\,dx$$
$$= \left[3 \times \frac{(x-3)^3}{3}\right]_0^1 - \left[6 \times \frac{(x-3)^2}{2}\right]_0^3 = [(x-3)^3]_0^1 - 3[(x-3)^2]_0^3$$
$$= [(1-3)^3 - (0-3)^3] - 3[(3-3)^2 - (0-3)^2]$$
$$= [(-8) - (-27)] - 3[(0) - (9)] = -8 + 27 + 27 = 46$$

أختبــــــر نفسك في الأسئلة الوزاريـــــــة

(2011)	جد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x\, dx$	$[Ans:\ e-1]$
(2011)	جد $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2+\tan x} dx$	$[Ans:\ \ln 3]$
(2012)	جد $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \sin x\, dx$	$\left[Ans:\ -\ln\frac{1}{2}=\ln 2\right]$
(2013/2011)	جد $\int_0^1 (1+e^x)^2 e^x\, dx$	$\left[Ans:\ \frac{1}{3}((1+e)^3-8)\right]$
(2014)	جد $\int \sqrt{e^{2x-4}}\, dx$	$[Ans:\ e^{x-2}+c\ ]$
(2018 ح1)	جد تكامل كل من: $1)\ \int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx \quad 2)\ \int(\tan x-\csc^2 x)\, dx$	
(2018 ط1)	جد التكاملات الأتية $1)\ \int_4^0 x(x-1)(x-2)dx \quad 2)\ \int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} dx$	

إيجاد مساحة المنطقة المستوية

أولاً : المساحة بين منحني ومحور السينات :

مثال :

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة : $f(x)=x^3-3x^2+2x$ ومحور السينات .

الحـــل : نجعل $f(x)=0$

$$x^3-3x^2+2x=0 \Rightarrow x(x^2-3x+2)=0 \Rightarrow x(x-1)(x-2)=0$$

$x=0\ ,\ x=1\ ,\ x=2$ ∴ فترات التكامل هي :- $[0,1]\ ,[1,2]$

$$A=\left|\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)\,dx\right|+\left|\int_1^2 (x^3-3x^2+2x)\,dx\right|$$
$$=\left|\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_1^2\right|$$
$$=\left|\left[\frac{1}{4}-1+1\right]-[0]\right|+\left|[4-8+4]-\left[\frac{1}{4}-1+1\right]\right|$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\quad unit^2$$

مثال :

جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y=\sin x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[\frac{-\pi}{2}\ ,\ \pi]$.

الحـــل :

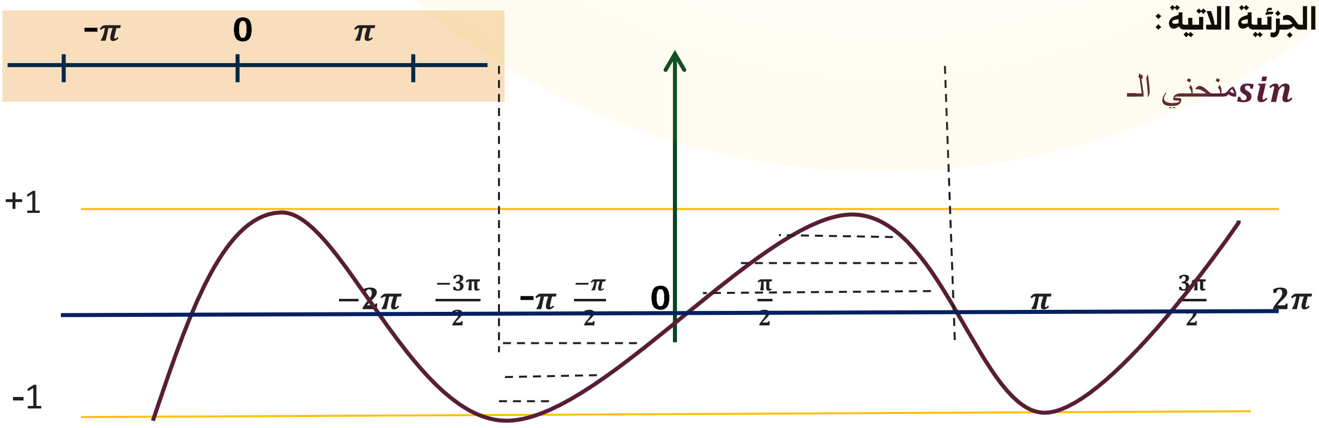
$$\boxed{\sin x=0 \Rightarrow x=0+k\pi\ ,\qquad k\in Z}$$

$k=0 \Rightarrow x=0\in\left[\frac{-\pi}{2},\pi\right]$, $k=2 \Rightarrow x=2\pi\notin\left[\frac{-\pi}{2},\pi\right]$

$k=1 \Rightarrow x=\pi\in\left[\frac{-\pi}{2},\pi\right]$, $k=-1 \Rightarrow x=-\pi\notin\left[\frac{-\pi}{2},\pi\right]$

$k=-2 \Rightarrow x=-2\pi\notin\left[\frac{-\pi}{2},\pi\right]$

∴ نجزئ فترة التكامل الى الفترات الجزئية الاتية :



$$A=\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x\,dx\right|+\left|\int_0^{\pi} \sin x\,dx\right|=\left|[-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^0\right|+\left|[-\cos x]_0^{\pi}\right|$$
$$=\left|[-\cos 0]-\left[-\cos\frac{-\pi}{2}\right]\right|+|[-\cos\pi]-[-\cos 0]|$$
$$=|-1+0|+|1+1|=3\ unit^2$$

مثال :

جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = \cos x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\pi , \pi]$.

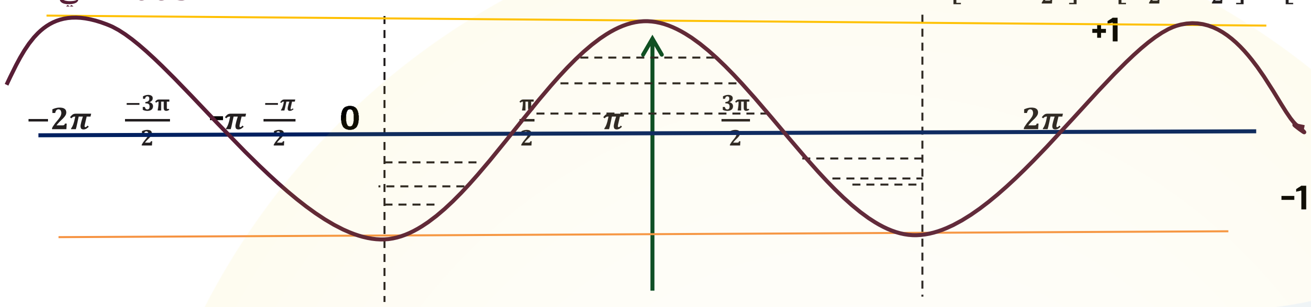
الحـــــــل :

$$\boxed{\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad , \quad n \in Z}$$

$n = -1 \Rightarrow x = \frac{-\pi}{2} \in [-\pi , \pi]$, $n = -2 \Rightarrow x = \frac{-3\pi}{2} \notin [-\pi , \pi]$

$n = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [-\pi , \pi]$, $n = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \notin [-\pi , \pi]$

∴ فترات التكامل هي : $\left[\frac{\pi}{2} , \pi\right]$, $\left[\frac{-\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[-\pi , \frac{-\pi}{2}\right]$



$$A = \left|\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx\right| + \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\, dx\right|$$

$$= \left|[\sin x]_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}}\right| + \left|[\sin x]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right| + \left|[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right|$$

$$= \left|\sin(\tfrac{-\pi}{2}) - \sin(-\pi)\right| + \left|\sin\tfrac{\pi}{2} - \sin(\tfrac{-\pi}{2})\right| + \left|\sin\pi - \sin\tfrac{\pi}{2}\right|$$

$= |-1 + 0| + |1 + 1| + |0 - 1| = 4$ وحدة مساحة

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(-\theta) &= -\sin\theta \\ \cos(-\theta) &= \cos\theta\end{aligned}}$$

ثانياً : مساحة المنطقة المحددة بمنحنيين:

مثال :

جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني : $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = x$.

الحـــــــل : نجد تقاطع المنحنيين

$f(x) = \sqrt{x} - x \Rightarrow \sqrt{x} - x = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = x$ بتربيع الطرفين

$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$

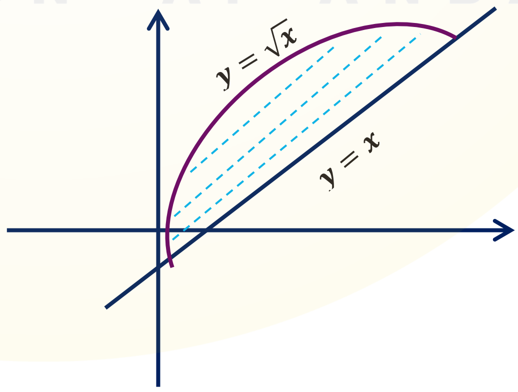
∴ فترة التكامل هي : $[0 , 1]$ $\quad x = 0 \; , \; x = 1$

$$A = \left|\int_0^1 (\sqrt{x} - x)\, dx\right| = \left|\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x\right) dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1\right| = \left|\left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1\right|$$

$$= \left|\left[\frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{2}{3}(0)^{\frac{3}{2}} - 0\right]\right|$$

$= \left|\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{4-3}{6}\right| = \frac{1}{6}$ وحدة مساحة



مثال :

جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$.

$y = \cos x - \sin x \Rightarrow \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow \tan x = 1$

يكون $\tan +$ في الربع الأول والثالث $\quad \therefore\; x = \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{-\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$, $x = \frac{5\pi}{4} \notin \left[\frac{-\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$

$$A = \left|\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)\, dx\right|$$

$$= \left|[\sin x + \cos x]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|[\sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \left|\left[\sin\tfrac{\pi}{4} + \cos\tfrac{\pi}{4}\right] - \left[\sin\tfrac{-\pi}{2} + \cos\tfrac{-\pi}{2}\right]\right| + \left|\left[\sin\tfrac{\pi}{2} + \cos\tfrac{\pi}{2}\right] - \left[\sin\tfrac{\pi}{4} + \cos\tfrac{\pi}{4}\right]\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]-[-1+0]\right|+\left|[1+0]-\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right|$$

$$= \left|\frac{2}{\sqrt{2}}+1\right|+\left|1-\frac{2}{\sqrt{2}}\right| = |\sqrt{2}+1|+|1-\sqrt{2}|$$

$$= \sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1 = 2\sqrt{2}$$ وحدة مساحة

مثال :

3) جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات .

الحــــل : نجعل $f(x) = 0$

$$x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2-1) = 0$$

$either\ \ x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \ \ or \ \ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

∴ فترات التكامل هي :- $[-1, 0]\ ,\ [0, 1]$

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \left|\int_{-1}^{0}(x^4-x^2)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1}(x^4-x^2)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$= \left|(0)-\left(\frac{-1}{5}+\frac{1}{3}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)-(0)\right| = \left|\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right|$$

$$= \left|\frac{3-5}{15}\right| + \left|\frac{3-5}{15}\right| = \left|\frac{-2}{15}\right| + \left|\frac{-2}{15}\right| = \frac{2}{15}+\frac{2}{15} = \frac{4}{15}\ \ unit^2$$

مثال :

5) جد المساحة المحددة بالمنحني $y = 2\cos^2 x - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$$y = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow y = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right) - 1 \Rightarrow y = 1 + \cos 2x - 1$$

$$\Rightarrow \therefore\ y = \cos 2x$$

$$\boxed{\cos ax = 0 \Rightarrow ax = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , \quad k \in Z}$$

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , \quad k \in Z$$

$$if\ \ k = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$if\ \ k = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

∴ فترات التكامل هي $\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) - (\sin 0)\right| + \frac{1}{2}\left|(\sin \pi) - \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

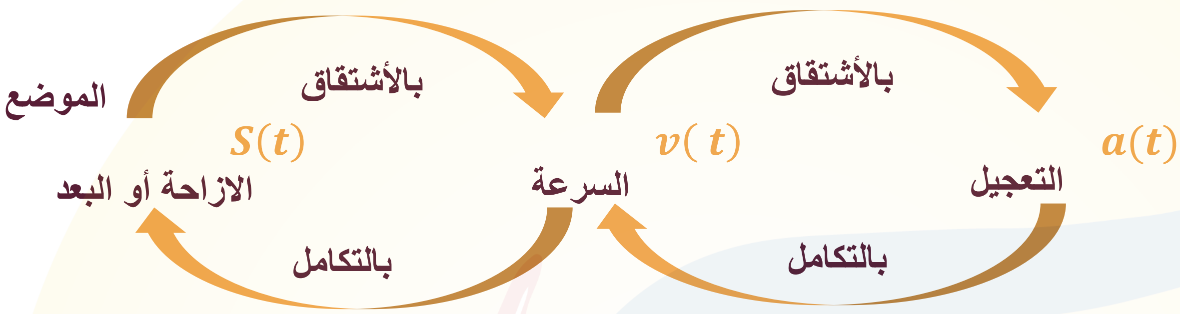
$$= \frac{1}{2}|1-0| + \frac{1}{2}|0-1| = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1\ \ unit^2$$

أختبـــــر نفسك في الأسئلة الوزاريـــــة

	جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = x$	[2011]
$\left[Ans:\ 1-\frac{\pi}{4}\,unit^2\right]$	جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = \sin x\ ,\ y = \sin^2 x$ بالفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	[2012]
$\left[Ans:\ \frac{448}{15}\,unit^2\right]$	جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = 2x^2\ ,\ y = x^4 - 8$	[2012]
	جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = (x-1)^3$ و محور السينات بالفترة $[-1, 3]$	[2012]
$\left[Ans:\ \frac{81}{2}\,unit^2\right]$	جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = x^3 - 9x$ و محور السينات بالفترة $[-3, 3]$	[2015]
	جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = x^4 - 12\ ,\ y = x^2$	[2015]
$[Ans:\ 1\ \ unit^2\ ]$	جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$ و محور السينات بالفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	[2016]
$[Ans:\ \ \ unit^2]$	جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = \sin 3x$ بالفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	[2016]

(2017 ح1)	جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = x^3 - x$ و محور السينات والمستقيمين $x = -1 \ , \ x = 1$	$\left[Ans: \frac{1}{2} \ unit^2\right]$
(2017 ح2)	جد المساحة المحددة بالمنحنيين $f(x) = \cos x \ , g(x) = \sin x$ بالفترة $\left[\frac{-\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$	
(2017 ط2)	جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x) = \sqrt{2x-1}$ و $g(x) = x$ وعلى الفترة $[1 , 5]$	
(2017 ح3)	جد المساحة المحصورة بالمنحنيين $y = x \ , \ y = x^3$	
(2018 ط3)	جد المساحة المحددة بالدالتين $y = \sqrt{x-1}$ والمستقيم $y = \frac{1}{2}x$ على الفترة $[2 , 5]$	

المسافـــــــة



- لتكن $v(t)$ سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم وفي مستو فإن المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية $[t_1 , t_2]$ هي :-

$$d = \left|\int_{t_1}^{t_2} v(t)\ dt\right| \quad , \quad S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\ dt \quad , \quad v = \int a(t)\, dt$$

- حيث d تمثل المسافة وان المسافة كمية غير متجهه, أما الازاحة S والسرعة v والتعجيل a فإن كلا منها كمية متجهه لذا فان:

ملاحظـــــــــــة

إذا أعطى في السؤال تعجيل $a(t)$ وطلب إيجاد المسافة أو الأزاحة فعندها يجب أن نجد السرعة أولا بالتكامل الغير محدد ثم نجد قيمة c من معطيات السؤال ثم نكمل الحل.

خطوات الحـــــــل : لإيجاد المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية $[t_1 , t_2]$

- نصفر السرعة أي نجعل $v(t) = 0$ لاستخراج قيم الزمن t .
- إذا كانت قيم (t) تنتمي للفترة المعطاة نجزئ التكامل أما إذا كانت قيم t لاتنتمي للفترة فتهمل ونلتزم بالفترة المعطاة .
- نطبق قانون المسافة $d = \left|\int_{t_1}^{t_2} v(t)\ dt\right|$
- ولكن لإيجاد الأزاحة (البعد , الموضع , الموقع) لا نصفر السرعة يعني نكامل فترة السؤال مبشرة , وبذلك نجد الاختلاف بين المسافة المقطوعة في الفترة $[t_1 , t_2]$ والازاحة (البعد) المقطوعة في الفترة $[t_1 , t_2]$.

مثال :

جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = 2t - 4$ فجد :-

(1) المسافة المقطوعة في الفترة $[1 , 3]$. (2) الازاحة المقطوعة في الفترة $(1,3)$.

(3) المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة. (4) بعده بعد مضي (4) ثواني من بدء الحركة.

1) أنتبه: في المسافة يجب أن نجعل السرعة تساوي صفرا ثم نجد قيم t فإذا أنتمت الى الفترة نجزء التكامل

$$2t - 4 = 0 \ \Rightarrow \ 2t = 4 \ \Rightarrow \ t = 2 \in [1 , 3] \ \Rightarrow [1 , 2], [2 , 3]$$

$$\therefore d = \left|\int_1^2 (2t-4)dt\right| + \left|\int_2^3 (2t-4)\, dt\right| = \left|[t^2 - 4t]_1^2\right| + \left|[t^2 - 4t]_2^3\right|$$

$$= |[4-8] - [1-4]| + |[9-12] - [4-8]|$$

$$= |-4+3| + |-3+4| = 1 + 1 = 2m$$

$$2)\ S = \int_1^3 (2t-4)\, dt = [t^2 - 4t]_1^3 = [9-12] - [1-4] = -3 + 3 = 0$$

المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة يقصد به الفترة $[4 , 5]$

$$3)\ \ d = \left|\int_4^5 (2t-4)\, dt\right| = \left|[t^2 - 4t]_4^5\right| = |[25-20] - [16-16]| = 5m$$

البعد بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة يقصد به الفترة $[0 , 4]$

$$4)\ \ S = \int_0^4 (2t-4)\, dt = [t^2 - 4t]_0^4 = [16-16] - [0] = 0$$

مثال : 3/2012 ، 1/2015 ، 2/2017

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدرة $(18)m/sec^2$ فإذا كانت سرعتة قد أصبحت $82m/s$ بعد مرور (4) ثواني من بدء الحركة جد :

a) المسافة خلال الثانية الثالثة . b) بعده عن نقطة بداية الحركة بعد مرور (3) ثواني .

$$a)\ v = \int a(t)\,dt = \int 18\,dt \quad \Rightarrow v = 18t + c \quad \Rightarrow \quad v = 82 \ , \quad t = 4$$

$$82 = 18(4) + c \quad \Rightarrow \quad 82 = 72 + c \quad \Rightarrow \quad c = 10$$

$$\therefore\ v = 18t + 10$$

$$\therefore \text{d} = \left|\int_2^3 (18t + 10)\,dt\right| = \left|9t^2 + 10t\right|_2^3$$

$$= |[81 + 30] - [36 + 20]| = |111 - 56| = 55m$$

$$b)\ S = \int_0^3 (18t + 10)\,dt = \left[9t^2 + 10t\right]_0^3 = [81 + 30] - [0] = 111\,m$$

مثال : 2/2011 ، 1/2018

12) جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t + 12)\ m/s^2$ وكانت سرعته بعد مرور (4) ثواني تساوي $90\ m/s$

إحسب :- (a) السرعة عندما $(b)t = 2$ المسافة خلال $[\,1\,,2\,]$ (c) الازاحة بعد (10) ثواني من بدء الحركة .

$$(a) \quad v(t) = \int (4t + 12)\,dt \Rightarrow \quad v(t) = 2t^2 + 12t + c$$

$$\therefore\ 90 = 2(16) + 12(4) + C \quad \Rightarrow \quad 90 = 32 + 48 + c$$

$$C = 90 - 80 \quad \Rightarrow \quad c = 10$$

$\therefore v(t) = 2t^2 + 12t + 10$ السرعة في أي لحظة

$$\therefore\ v(2) = 2(4) + 12(2) + 10 = 8 + 24 + 10 = 42\ m/s$$

$$(b) \quad d = \left|\int_1^2 (2t^2 + 12t + 10)\,dt\right| = \left|\left[\frac{2}{3}\,t^3 + 6t^2 + 10t\right]_1^2\right|$$

$$= \left|\left(\frac{16}{3} + 24 + 20\right) - \left(\frac{2}{3} + 6 + 10\right)\right| = \left|\frac{16}{3} + 44 - \frac{2}{3} - 16\right| = \left|\frac{14}{3} + 28\right| = \frac{98}{3}\ m$$

$$(c)\ S = \int_0^{10} (2t^2 + 12t + 10)\,dt = \left[\frac{2}{3}\,t^3 + 6t^2 + 10t\right]_0^{10}$$

$$= \left[\frac{2000}{3} + 600 + 100\right] - [0] = \frac{2000}{3} + 700 = \frac{2000 + 2100}{3} = \frac{4100}{3}\ m$$

أختبـــــر نفسك في الأسئلة الوزاريـــــة

[2013]	سفينة شحن تتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = (3t^2 - 6t + 3)\ m/min$ أحسب: (1) المسافة المقطوعة ضمن الفترة الزمنية $[2\,,4]$ (2) الأزاحة المقطوعة بعد 5 دقائق من بدأ الحركة	$\left[\begin{matrix} Ans:\ 1)\ d = 26\,m \\ 2)\ S = 65\,m \end{matrix}\right]$
[2007/ 2014/2016]	تتحرك نقطة مادية من سكون وبعد (t) ثانية من بدأ الحركة أصبحت سرعتها $V(t) = (100t - 6t^2)\ m/s$ جد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الأصلي. ثم أحسب التعجيل عندها	$\left[\begin{matrix} t = 25\,s \\ 2)a(25) = -200m/s^2 \end{matrix}\right]$
[2015]	جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل مقداره $[10\ \ m/s^2]$ وبعد 2 ثانية من بدأ الحركة أصبحت سرعته $24\ m/s$ أحسب : 1) المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة 2) بعده بعد مضي 4 ثواني	$\left[\begin{matrix} Ans:\ d = 49 \\ S = 96 \end{matrix}\right]$
[2016]	جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t + 12)\ \ m/s^2$ فأذا كانت سرعته بعد مرور 4 ثواي تساوي $90\ m/s$ أحسب : 1) السرعة عندما 2) المسافة خلال $[1\,,2]$	$\left[Ans:\ d = \frac{98}{3}\,m\right]$
[2017 ط2]	جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل ثابت مقداره $[18\ \ m/s^2]$ وكانت سرعته عند الثانية الرابعة $82\ m/s$ جد: (1) المسافة التي يقطعها الجسم خلال الثانية الرابعة (2) بعد الجسم عن نقطة بداية الحركة بعد مرور (10) ثواني	
[2018 ط2]	جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t + 12)\ \ m/s^2$ وكانت سرعته بعد (4) ثواي تساوي $90\ m/s$ أحسب :- (1) السرعة عندما (2) الأزاحة بعد 10 ثواني من بدأ الحركة (3) المسافة المقطوعة خلال $[1\,,2]$	
[2018 ط2]	جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = (2t - 4)\ m/s$ أحسب :- (1) المسافة المقطوعة بالفترة $[1\,,6]$ (2) بعد الجسم بعد مضي 4 ثواني من بدأ الحركة	

الحجوم الدورانية: Volumes of Revolution

أولا : - الحجم المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $y = f(x)$ المستمرة من $x = a$ الى $x = b$ حول محور السينات لإيجاد حجمه نستخدم القانون الأتي :-

$$v = \pi \int_a^b y^2\, dx$$

أولا : - الدوران حول المحور السيني :-

1 لإيجاد الحجم يجب توفر الدالة $y = f(x)$ وفترة وتكون على عدة أشكال مثل $x \in [a\,, b]$ أو $a \le x \le b$ أو على شكل مستقيمين $x = a\ ,\ \ x = b$

2 إذا أعطى الفترة المخالفة أي الدوران حول السيني وأعطى قيم لـ(y) فنحول القيم لدلالة الـ(x) وذلك بتعويض قيم (y) في الدالة

3 إذا لم يعطي إي قيمة لل x أو أعطى قيمة واحدة لل x (إي مستقيم واحد: $x = \mathrm{a}$) فلإيجاد قيم x نجد التقاطع مع محور السينات وذلك بجعل $y = 0$ ونعوضها في الدالة الاصلية لاستخراج قيم x وهي فترة التكامل

ثانيا : - الحجم المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $y = f(x)$ المستمرة من $x = a$ الى $x = b$ حول محور الصادات لإيجاد حجمه نستخدم القانون الأتي :-

$$v = \pi \int_a^b x^2\, dy$$

ثانيا : - الدوران حول المحور الصادي :-

1 لإيجاد الحجم يجب توفر الدالة $y = f(x)$ وفترة وتكون على عدة أشكال مثل $y \in [a\,, b]$ أو $a \le y \le b$ أو على شكل مستقيمين $y = a\,,\ y = b$

2 إذا أعطى الفترة المخالفة أي الدوران حول الصادي وأعطى قيم لـ(x) فنحول القيم لدلالة الـ(y) وذلك بتعويض قيم (x) في الدالة

3 إذا لم يعطي إي قيمة لل y أو أعطى قيمة واحدة لل y (إي مستقيم واحد: $y = \mathrm{a}$) فلإيجاد قيم y نجد التقاطع مع محور الصادي وذلك بجعل $x = 0$ ونعوضها في الدالة الاصلية لاستخراج قيم y وهي فترة التكامل

مثال 1 :

جد حجم المنطقة المحددة بين المنحني $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$ ومحور السينات والتي دارت حول محور السينات

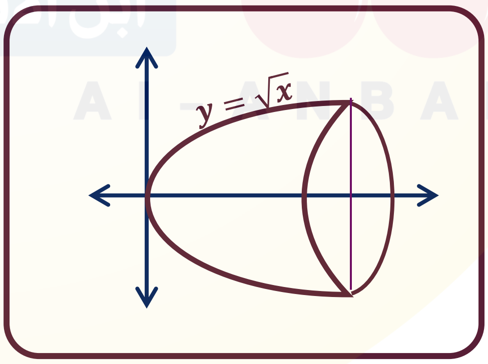
$$v = \pi \int_a^b y^2\, dx$$

$$v = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx$$

$$v = \pi \int_0^4 x\, dx$$

$$v = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$$v = \pi[\,8 - 0] = \boxed{8\pi \ \ unit^{\,3}}$$



مثال 2 :

المنطقة المحددة بين المنحني $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$, $1 \le y \le 4$ دارت حول محور الصادات جد حجمها

$$v = \pi \int_a^b x^2\, dy$$

$$v = \pi \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 dy$$

$$v = \pi \int_a^b \frac{1}{y} dy$$

$$v = \pi\, [\, \ln y\,]_1^4 \ \ = \pi[\ln 4 - \ln 1]$$

$$v \ = \pi[\ln 2^2 - 0]$$

$$v = \boxed{2\pi \ln 2 \ \ unit^{\,3}}$$

مثال 3 :

أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 8x$ والمستقيمين $x = 2 , x = 0$ حول المحور السيني .

$$v = \pi \int_a^b y^2\,dx \quad v = \pi \int_0^2 8x\,dx$$

$$v = \pi \left[4x^2\right]_0^2 = \pi[16 - 0]$$

$$= \boxed{16\pi\ unit^3}$$

مثال 4 :

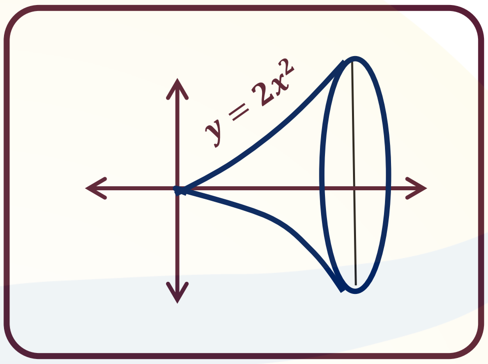
أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = 2\,x^2$ والمستقيمين $x = 5 , x = 0$ حول المحور السيني

$$v = \pi \int_a^b y^2\,dx$$

$$v = \pi \int_0^5 4x^4\,dx$$

$$v = \pi \left[\frac{4x^5}{5}\right]_0^5$$

$$v = \pi \left[\frac{4(5)^5}{5} - 0\right] = \boxed{2500\pi\ unit^3}$$



مثال 5 :

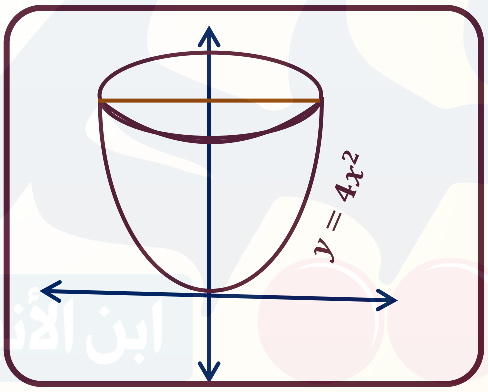
أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = 4\,x^2$ والمستقيمين $y = 0 , y = 16$ حول المحور الصادي

$$v = \pi \int_a^b x^2\,dy$$

$$v = \pi \int_0^{16} \frac{y}{4}\,dy$$

$$v = \pi \left[\frac{y^2}{8}\right]_0^{16}$$

$$v = \frac{\pi}{8}\left[(16)^2 - 0\right] = \boxed{32\pi\ unit^3}$$



مثال 6 :

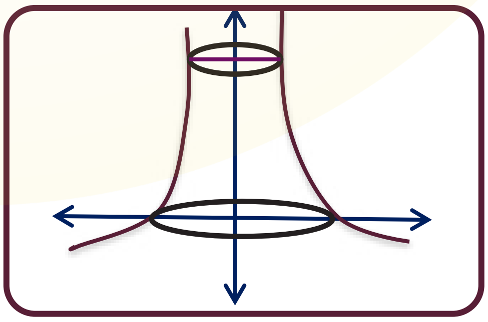
أوجد الحجم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $y = \frac{3}{x}$ $\quad 1 \le y \le 3$

$$v = \pi \int_a^b x^2\,dy = \pi \int_1^3 \frac{9}{y^2}\,dy$$

$$v = 9\pi \int_1^3 y^{-2}\,dy$$

$$v = 9\pi \left[\frac{-1}{y}\right]_1^3$$

$$= 9\pi\left[\frac{-1}{3} + 1\right] = 6\pi\ unit^3$$



مثال 7 :

إذا كانت $y^2 = 8x$ حيث أن $x \in [0 , 2]$ فأوجد

(a) حجم الجسم الناشئ عند دوران المنطقة في الربع الأول والمحددة بالمنحني ومحور السينات دورة كاملة

(b) حجم الجسم الناشئ عند دوران المساحة المحددة في الربع الأول بالمنحني ومحور الصادات دورة كاملة

$$(a)\quad v = \pi \int_a^b y^2\,dx \Rightarrow v = \pi \int_0^2 8x\,dx \Rightarrow v = \pi \left[\frac{8x^2}{2}\right]_0^2$$

$$v = \pi \left[4\,x^2\right]_0^2 \Rightarrow v = \pi[\,16 - 0] \Rightarrow v = 16\pi\ \ unit^3$$

(b) يجب أيجاد الدالة بدلالة الـ(x^2) وإيجاد حدود التكامل بدلالة الـ(y) وذلك بتعويض قيم $(x=0, x=2)$ في الدالة

$$when \quad x=0 \Rightarrow y^2 = 8\,(0) \Rightarrow y=0$$
$$when \quad x=2 \Rightarrow y^2 = 8\,(2) \Rightarrow y^2=16 \Rightarrow y=4 \Rightarrow y\in[0,4]$$
$$y^2=8x \Rightarrow x=\frac{1}{8}y^2 \Rightarrow x^2=\frac{1}{64}y^4$$
$$v=\pi\int_a^b x^2\,dy \Rightarrow v=\pi\int_0^4 \frac{1}{64}y^4\,dx \Rightarrow v=\frac{\pi}{64}\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^4$$
$$v=\frac{\pi}{(4)^3}\left[\frac{(4)^5}{5}-0\right] \Rightarrow v=\frac{\pi}{(4)^3}\left(\frac{(4)^5}{5}\right) \Rightarrow v=\frac{16}{5}\pi \ \ unit^3$$

$$y=1+\sin x \Rightarrow y^2=(1+\sin x)^2 \Rightarrow y^2=1+2\sin x+\sin^2 x$$
$$v=\pi\int_a^b y^2\,dx \Rightarrow v=\pi\int_0^\pi(1+2\sin x+\sin^2 x)\,dx$$
$$v=\pi\int_0^\pi\left(1+2\sin x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$
$$v=\pi\left[x-2\cos x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi$$
$$=\pi\left[\left(\pi-2\cos\pi+\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{4}\sin 2\pi\right)-\left(0-2\cos 0+\frac{1}{2}(0)-\frac{1}{4}\sin 0\right)\right]$$
$$=\pi\left[\left(\frac{3}{2}\pi-2(-1)-\frac{1}{4}(0)\right)-\left(-2(1)-\frac{1}{4}(0)\right)\right]$$
$$=\pi\left[\left(\frac{3}{2}\pi+2\right)-(-2(1))\right]=\pi\left[\left(\frac{3}{2}\pi+2\right)+(2)\right]=\left(\frac{3}{2}\pi+4\right)\pi \ \ unit^3$$

مثال 9 :

أوجد الحجم الجسم المتولد من دوران المنحني $y=1+\sin x$ حول محور السينات $0\le x\le\pi$ دورة كاملة

$$y=1+\sin x \Rightarrow y^2=(1+\sin x)^2 \Rightarrow y^2=1+2\sin x+\sin^2 x$$
$$v=\pi\int_a^b y^2\,dx \Rightarrow v=\pi\int_0^\pi(1+2\sin x+\sin^2 x)\,dx$$
$$v=\pi\int_0^\pi\left(1+2\sin x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$
$$v=\pi\left[x-2\cos x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi$$
$$=\pi\left[\left(\pi-2\cos\pi+\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{4}\sin 2\pi\right)-\left(0-2\cos 0+\frac{1}{2}(0)-\frac{1}{4}\sin 0\right)\right]$$
$$=\pi\left[\left(\frac{3}{2}\pi-2(-1)-\frac{1}{4}(0)\right)-\left(-2(1)-\frac{1}{4}(0)\right)\right]$$
$$=\pi\left[\left(\frac{3}{2}\pi+2\right)-(-2(1))\right]=\pi\left[\left(\frac{3}{2}\pi+2\right)+(2)\right]=\left(\frac{3}{2}\pi+4\right)\pi \ \ unit^3$$

مثال 10 :

أوجد الحجم الجسم الناشئ من دوران الدالة $y=e^x$ والمستقيمين $x=0, x=2$ حول المحور السينات

$$y=e^x \Rightarrow y^2=(e^x)^2 \Rightarrow y^2=e^{2x}$$
$$v=\pi\int_a^b y^2\,dx \Rightarrow v=\pi\int_0^2 e^{2x}\,dx \Rightarrow v=\frac{\pi}{2}\left[e^{2x}\right]_0^2$$
$$v=\frac{\pi}{2}(e^4-e^0) \Rightarrow v=\frac{(e^4-1)}{2}\pi \ \ unit^3$$

مثال 11 :

أثبت أن لحجم الكرة الناشئ من دوران نصف الدائرة التي معادلتها $x^2+y^2=r^2$ حول المحور السينات هو $v=\frac{4}{3}\pi r^3$

$$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow if\ \ y=0 \Rightarrow x^2+(0)^2=r^2 \Rightarrow x^2=r^2 \Rightarrow x\in[-r,r]$$
$$\Rightarrow y^2=r^2-x^2$$
$$v=\pi\int_a^b y^2\,dx \Rightarrow v=\pi\int_{-r}^r(r^2-x^2)\,dx \Rightarrow v=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^r$$
$$v=\pi\left[\left(r^2(r)-\frac{r^3}{3}\right)-\left(r^2(-r)-\frac{(-r)^3}{3}\right)\right]$$
$$v=\pi\left[\left(r^3-\frac{1}{3}r^3\right)-\left(-r^3+\frac{1}{3}r^3\right)\right]$$
$$v=\pi\left(r^3-\frac{1}{3}r^3+r^3-\frac{1}{3}r^3\right) \Rightarrow v=\left(2r^3-\frac{2}{3}r^3\right)\pi$$
$$v=\left(2-\frac{2}{3}\right)\pi r^3 \Rightarrow v=\frac{4}{3}\pi r^3 \ \ unit^3$$

أختبـــــر نفسك في الأسئلة الوزاريـــــة

(1ط 2017)	جد الحجم الناتج من دوران الدائرة $(x^2 + y^2 = 9)$ حول محور السينات ومركزها نقطة الأصل	$[Ans: 36\ unit^3]$
(3ط 2017)	جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بمنحني الدالة $(x^2 + y^2 = 81)$ حول محور الصادات علما أن المنحني يقطع محور الصادات .	
(ت ج 2019)	جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y = 2x^2$ والمستقيمين $x = 0 , x = 5$	
(1ط 2020)	جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y = 2x^2$ والمستقيمين $x = 0 , x = 5$	

الفصل الخامس المعادلات التفاضلية الاعتيادية

المعادلة التفاضلية :- هي المعادلة التي تحتوي على مشتقة واحدة أو أكثر للدالة المجهولة في المعادلة (إي للمتغير التابع في المعادلة) .

حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية :- هو أية علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث أن هذه العلاقة :

1) خالية من المشتقة 2) معرفة على فترة معينة 3) تحقق المعادلة التفاضلية

إذا قيل في السؤال (أثبت ،برهن، هل ،بين) نتبع الخطوات الاتية :-

1) كتابة العلاقة (وهي خالية من الاشتقاق) .
2) نشتق العلاقة حسب رتبة المعادلة التفاضلية .
3) في بعض الاسئلة عند الاشتقاق تظهر المعادلة التفاضلية فان العلاقة حلا للمعادلة التفاضلية .
4) قد تحتاج الى التعويض سواء في الطرف الايسر أوالإيمن أو في كلاهما سواء علاقة أو المشتقة

مثـــال :

بين أن العلاقة $y = x^2 + 3x$ حلا للمعادلة التفاضلية $xy' = x^2 + y$.

جـــ :

نلاحظ أن المعادلة التفاضلية تحتوي على مشتقة أولى لذا نجد المشتقة الأولى

$y = x^2 + 3x \Rightarrow y' = 2x + 3$

$LHS = x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$ الطرف الأيسر

$RHS = x^2 + x^2 + 3x = 2x^2 + 3x$ الطرف الأيمن $\Rightarrow \therefore LHS = RHS$

$\therefore$ العلاقة $y = x^2 + 3x$ هي حلا للمعادلة التفاضلية $xy' = x^2 + y$.

مثـــال :

أثبت أن $y = x\ln|x| - x$ أحد حلول المعادلة : $x\frac{dy}{dx} = x + y \quad , x > 0$

جـــ :

نلاحظ أن المعادلة التفاضلية تحتوي على مشتقة أولى لذا نجد المشتقة الأولى

$y = x\,ln\,|x| - x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \times \frac{1}{x} + ln|x|\,(1) - 1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + ln|x| - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ln\,|x|$

$LHS = x\frac{dy}{dx} = x\,(ln\,|x|) = x\ln|x|$

$RHS = x + y = x + x\,ln\,|x| - x = x\,ln\,|x| \Rightarrow \therefore LHS = RHS$

العلاقة $y = x\ln|x| - x$ هي حلا للمعادلة التفاضلية $x\frac{dy}{dx} = x + y$.

بين أن $a \in R \ln y^2 = x + a$ حلاً للمعادلة $2y' - y = 0$

ج:

$\ln y^2 = x + a \Rightarrow 2\ln|y| = x + a \Rightarrow 2\frac{1}{y} \times y' = 1$

$\Rightarrow 2y' = y \Rightarrow 2y' - y = 0$

$\therefore$ $\ln y^2 = x + a$ حل للمعادلة $2y' - y = 0$

تمارين (5-1)

(3) برهن أن العلاقة $S = 8\cos 3t + 6\sin 3t$ هي حل للمعادلة $\frac{d^2S}{dt^2} + 9S = 0$

ج:

$S = 8\cos 3t + 6\sin 3t \Rightarrow S' = -24\sin 3t + 18\cos 3t$

$S'' = -72\cos 3t - 54\sin 3t$

$LHS = S'' + 9S = -72\cos 3t - 54\sin 3t + 9(8\cos 3t + 6\sin 3t)$

$= -72\cos 3t - 54\sin 3t + 72\cos 3t + 54\sin 3t = 0 = RHS$

$\therefore$ $S = 8\cos 3t + 6\sin 3t$ يمثل حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2S}{dt^2} + 9S = 0$

(4) هل أن $y = x + 2$ حلا للمعادلة $y'' + 3y' + y = x$.

ج:

$y = x + 2 \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow y'' = 0$

$LHS = y'' + 3y' + y = 0 + 3(1) + (x + 2)$

$= x + 5 \neq RHS$

$\therefore$ $y = x + 2$ لا يمثل حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + 3y' + y = x$

(5) هل $y = \tan x$ حلا للمعادلة $y'' = 2y(1 + y^2)$ ؟ 2/2018

ج:

$y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x \Rightarrow y'' = 2\sec x . \sec x \tan x$

$y'' = 2\sec^2 x \tan x$

$LHS = y'' = 2\sec^2 x \tan x = 2(1 + \tan^2 x)\tan x = 2\tan x(1 + \tan^2 x)$

$= 2y(1 + y^2) = RHS$ but $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$\therefore$ $y = \tan x$ يمثل حلا للمعادلة التفاضلية $y'' = 2y(1 + y^2)$

(6) هل $2x^2 + y^2 = 1$ حلا للمعادلة $y^3 y'' = -2$ ؟

ج:

$2x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - 2x^2 \Rightarrow 2yy' = -4x \quad \div 2$

$\Rightarrow yy' = -2x \Rightarrow y' = \frac{-2x}{y} \quad \dots\dots (1)$

$yy' = -2x \Rightarrow y(y'') + y'(y') = -2 \Rightarrow y(y'') + (y')^2 = -2 \quad \dots\dots (2)$

نعوض معادلة رقم (1) في معادلة رقم (2)

$yy'' + \left(\frac{-2x}{y}\right)^2 = -2 \Rightarrow yy'' + \frac{4x^2}{y^2} = -2$ بضرب طرفي المعادلة في $y^2 \neq 0$

$\Rightarrow y^3 y'' + 4x^2 = -2y^2 \Rightarrow y^3 y'' = -4x^2 - 2y^2$

$\Rightarrow y^3 y'' = -2(2x^2 + y^2)$ but $\because 2x^2 + y^2 = 1$

$\Rightarrow y^3 y'' = -2(1) \Rightarrow y^3 y'' = -2$

$\therefore$ $2x^2 + y^2 = 1$ يمثل حلا للمعادلة التفاضلية $y^3 y'' = -2$

(7) هل $yx = \sin 5x$ حلا للمعادلة $xy'' + 2y' + 25xy = 0$ ؟

ج:

$xy = \sin 5x \Rightarrow y(1) + x(y') = 5\cos 5x \Rightarrow y + xy' = 5\cos 5x$

$xy'' + 2y' = -25\sin 5x \Rightarrow$ but $\because \sin 5x = yx$

$\therefore xy'' + 2y' = -25yx \Rightarrow xy'' + 2y' + 25xy = 0$

$\therefore$ $yx = \sin 5x$ يمثل حلا للمعادلة التفاضلية $xy'' + 2y' + 25xy = 0$

(8) بين أن $y = ae^{-x}$ حلا للمعادلة التفاضلية $y' + y = 0$ حيث $a \in R$ ؟ 1/2013 , 3/2012

ج:

نعوض y' , y في الطف الأيسر للمعادلة

$y = ae^{-x} \Rightarrow y' = -ae^{-x}$

$LHS = y' + y \Rightarrow = -ae^{-x} + ae^{-x} = 0 = RHS$

$\therefore$ $y = ae^{-x}$ يمثل حلا للمعادلة التفاضلية $y' + y = 0$

(9) بين أن $C \in R$ ، $ln\,|y| = x^2 + C$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $y'' = 4x^2y + 2y$ ؟ 2/2015

جـ:

$$ln\,|y| = x^2 + C \xrightarrow{\text{بالأشتقاق}} \frac{1}{y}.y' = 2x \xrightarrow{\times y} y' = 2xy$$

$$y'' = 2x(y') + y(2) \quad \Rightarrow \quad but \quad y' = 2xy \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad y'' = 4x^2y + 2y$$

$\therefore$ $ln\,|y| = x^2 + C$ يمثل حلا للمعادلة التفاضلية $y'' = 4x^2y + 2y$

أختبـــــر نفسك في الأسئلة الوزاريـــــة

[2014/2011]	هل أن $y = x^3 - x - 2$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} - 6x = 0$ ؟ نعم
[2012]	برهن أن $y = sin\,x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$ ؟ نعم
[2013/2012]	بين أن $y = a\,e^{-x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y' + y = 0$ ؟ نعم
[2014/2013]	بين أن $y = x^2 + 3x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $xy' = x^2 + y$ ؟ نعم
[2015 ت]	برهن أن $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$ ؟
[2015]	هل $y^2 = 3x^2 + x^3$ يمثل حلاً للمعادلة $yy'' + (y')^2 - 3x = 3$ ؟
[2015]	بين أن العلاقة $ln\,y = x^2 + c$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' = 4x^2y + 2y$ ؟ نعم
[2016 ت]	برهن أن $y = x\,ln\,x - x$ هو أحد حلول المعادلة $x\frac{dy}{dx} = x + y$ ؟
[2018 د1]	هل أن $2x^2 - y^2 = 1$ هو حلاً للمعادلة $y''y^3 = -2$ ؟ بين ذلك
[2018 د2]	بين أن $y = e^{2x} + e^{-3x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y' - 6y = 0$ ؟
[2018 ط2]	هل أن $y = tan\,x$ هو حلاً للمعادلة ا $y'' = 2y(1 + y^2)$ ؟
[2018 د3]	هل يمثل $y = x\,ln|x| - x$ هو أحد حلول المعادلة $x\frac{dy}{dx} = x + y$ ؟ بين ذلك

بعض طرق حل المعادلات التفاضلية:

أولاً : المعادلات التي تنفصل متغيراتها : Separation of Variables

ملاحظـــــــــــــة

يجب جعل كل طرف يطابق دليل التكامل أي تكون الـ(x) مع dx والـ(y) مع dy أما إذا كان المتغير يخالف دليل التكامل فيتحول الى مقام الطرف الأخر بالقسمة

مثـــال:

حل المعادلة التفاضلية $dy = sin\,x\,cos^2\,y\,dx$. حيث $\cos y \neq 0$, $y = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

جـ:

$$dy = \sin x \cos^2 y\,dx \quad \div \cos^2 y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\cos^2 y}dy = \sin x\,dx$$

$$\sec^2 y\,dy = \sin x\,dx \qquad because \qquad \sec^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$\int \sec^2 y\,dy = \int \sin x\,dx \quad \Rightarrow \quad \tan y = -\cos x + c$$ حل المعادلة التفاضلية

ملاحظة :- عندما يعطي بالسؤال قيم المتغيرين y , x هذا يعني يجب أن نجد قيمة الثابت الأختياري c

مثـــال: 1/2017

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' - x\sqrt{y} = 0$ عندما $x = 2\,, y = 9$

جـ:

$$\frac{dy}{dx} - x\sqrt{y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\,y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dy = x\,y^{\frac{1}{2}}dx$$ $y^{\frac{1}{2}}$ يخالف الـ dx

$$\frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}} = xdx \Rightarrow y^{\frac{-1}{2}}dy = xdx \Rightarrow \int y^{\frac{-1}{2}}dy = \int x\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + c \; \dots\dots\dots(1)$$

بالتعويض عن $x = 2\,, y = 9$ ينتج

$$2\sqrt{9} = \frac{1}{2}(2)^2 + c \Rightarrow 6 = 2 + c \Rightarrow c = 4$$

نعوض قيمة $c = 4$ في معادلة رقم (1) نحصل على الحل الخاص :-

$$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + 4 \xrightarrow{\div 2} \sqrt{y} = \frac{1}{4}x^2 + 2$$ بالتربيع

حل المعادلة التفاضلية هو $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2\right)^2$

مثال : 1/2017

أوجد حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$ حيث $x = 0 , y = 0$

جـ :

$$dy = e^{2x+y}dx \Rightarrow dy = e^{2x}\, e^{y}dx \Rightarrow \frac{1}{e^y}dy = e^{2x}dx$$

$$\Rightarrow e^{-y}dy = e^{2x}dx \Rightarrow -\int e^{-y}.-dy = \frac{1}{2}\int e^{2x}.2\,dx$$

$$\Rightarrow -e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} + c \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

بالتعويض عن $x = 0 , y = 0$ ينتج في معادلة رقم(1) نجد قيمة c ثم نعوضها

$$-e^{-0} = \frac{1}{2}e^{0} + c \Rightarrow -1 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = -\frac{3}{2}$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2} \xRightarrow{\times -1} e^{-y} = \frac{1}{2}(3 - e^{2x})$$

$$\frac{1}{e^y} = \frac{3 - e^{2x}}{2} \Rightarrow e^{y}(3 - e^{2x}) = 2$$

$e^y = \frac{2}{3 - e^{2x}}$ وبأخذ Ln للطرفين $\Rightarrow y = \ln\left|\frac{2}{3 - e^{2x}}\right|$

حل المعادلة التفاضلية هو $y = Ln\left|\frac{2}{3 - e^{2x}}\right|$

مثال : 1/2017

أوجد حل المعادلة التفاضلية $(1 + x^3)dy - x^2\, y\, dx = 0$ حيث $x = 1 , y = 2$

جـ :

$$(1 + x^3)dy - x^2\, y\, dx = 0 \Rightarrow \frac{1}{y}dy = \frac{x^2}{(1 + x^3)}dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{x^2}{(1 + x^3)}dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \frac{1}{3}\int \frac{3\,x^2}{(1 + x^3)}dx$$

$$ln|y| = \frac{1}{3}ln|1 + x^3| + ln|c| \Rightarrow 3\,ln|y| = ln|1 + x^3| + 3\,ln|c|$$

$$ln|y^3| = ln|c^3(1 + x^3)| \Rightarrow ln|y^3| = ln|c_1(1 + x^3)| \qquad c_1 = c^3$$

$$ln|y^3| = ln|c_1(1 + x^3)| \Rightarrow y^3 = c_1(1 + x^3) \ldots\ldots\ldots(1)$$

بالتعويض عن $x = 1 , y = 2$ ينتج في معادلة رقم(1) نجد قيمة c ثم نعوضها

$$(2)^3 = c_1(1 + (1)^3) \Rightarrow 8 = c_1(2) \Rightarrow c_1 = \frac{8}{2} \Rightarrow c_1 = 4$$

حل المعادلة التفاضلية هو $y^3 = 4\,(1 + x^3) \Rightarrow y = \sqrt[3]{4\,(1 + x^3)}$

تمارين (2-5)

b) $\frac{dy}{dx} + xy = 3x$

$$\frac{dy}{dx} = 3x - xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(3 - y)$$

$$dy = x(3 - y)\,dx \Rightarrow \frac{1}{3 - y}dy = x\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{3 - y}dy = \int x\,dx$$

$$-\,ln|3 - y| = \frac{1}{2}x^2 + c \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

بالتعويض عن $x = 1 , y = 2$ ينتج في معادلة رقم(1) نجد قيمة c ثم نعوضها

$$-\,ln|3 - 2| = \frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

$$-Ln|3 - y| = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \xRightarrow{\times -1} Ln|3 - y| = \frac{1}{2}(1 - x^2)$$

$$\xRightarrow{\text{وبأخذ } e \text{ للطرفين}} 3 - y = e^{\frac{1}{2}(1 - x^2)} \Rightarrow$$

حل المعادلة التفاضلية هو $y = 3 - e^{\frac{1}{2}(1 - x^2)}$

d) $(y^2 + 4y - 1)y' = (x^2 - 2x + 3)$

$$(y^2 + 4y - 1)\frac{dy}{dx} = (x^2 - 2x + 3)$$

$$(y^2 + 4y - 1)dy = (x^2 - 2x + 3)dx$$

$$\int (y^2 + 4y - 1)dy = \int (x^2 - 2x + 3)dx$$

حل المعادلة التفاضلية هو $\frac{1}{3}y^3 + 2y^2 - y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + c$

$e)\ yy' = 4\sqrt{(1+y^2)^3}$

$y\dfrac{dy}{dx} = 4(1+y^2)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y\,dy = 4(1+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$

$(1+y^2)^{\frac{-3}{2}}\,y\,dy = 4\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{1}{2}\int (1+y^2)^{\frac{-3}{2}}\,2y dy = \int 4dx$

$\dfrac{1}{2} \times \dfrac{(1+y^2)^{\frac{-1}{2}}}{\frac{-1}{2}} = 4x + c \quad \Rightarrow \quad \dfrac{-1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} = 4x + c$

حل المعادلة التفاضلية هو $\dfrac{-1}{\sqrt{1+y^2}} = 4x + c$

$g\ )\ y' = 2\,e^x y^3 \qquad x = 0\ , \quad y = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{dy}{dx} = 2\,e^x y^3 \Rightarrow \dfrac{1}{y^3}dy = 2e^x dx \Rightarrow \int y^{-3}dy = 2\int e^x dx$

$\dfrac{y^{-2}}{-2} = 2e^x + c \Rightarrow \dfrac{-1}{2y^2} = 2e^x + c$ نعوض كل من $x = 0\ , y = \dfrac{1}{2}$ في

$\dfrac{-1}{2\left(\frac{1}{4}\right)} = 2e^0 + c \Rightarrow \dfrac{-1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2 + c \Rightarrow -2 = 2 + c \Rightarrow c = -4$

$\dfrac{-1}{2y^2} = 2e^x - 4 \xRightarrow{\times -2} \dfrac{1}{y^2} = -4e^x + 8 \Rightarrow y^2 = \dfrac{1}{8 - 4e^x}$

حل المعادلة التفاضلية هو $\therefore\ y = \sqrt{\dfrac{1}{8-4e^x}}$

2) جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الاتية:

$a)\ xy\,\frac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2$

$xy\dfrac{dy}{dx} = (1 - 2y^2) \quad \Rightarrow \quad xy\,dy = (1-2y^2)\,dx$

$\dfrac{y}{1-2y^2}dy = \dfrac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \int \dfrac{y}{1-2y^2}dy = \int \dfrac{1}{x}dx$

$-\dfrac{1}{4}\int \dfrac{-4y}{(1-2y^2)}dy = \int \dfrac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \blacksquare -\dfrac{1}{4}ln|1-2y^2| = ln|x| + ln|c|$

$ln|1-2y^2| = -4\,ln(cx) \quad \Rightarrow \quad ln|1-2y^2| = ln(cx)^{-4}$

$1 - 2y^2 = (cx)^{-4} \quad \Rightarrow \quad 2y^2 = 1 - (cx)^{-4} \quad \Rightarrow \quad y^2 = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{(cx)^4}\right)$

$y = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{(cx)^4}\right)}$

$tan\,y\,dy = -x\,cos^2 y\,dx \quad \Rightarrow \quad tan\,y\dfrac{1}{cos^2 y}dy = -xdx$

$\dfrac{\sin y}{\cos y}\,\dfrac{1}{\cos^2 y}dy = -xdx \quad \Rightarrow \quad -\int \cos^{-3} y\,(-\sin y)\,dy = -\int x\,dx$

$\dfrac{-\cos^{-2} y}{-2} = -\dfrac{1}{2}x^2 + c \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{2\cos^2 y} = -\dfrac{1}{2}x^2 + C$

$\dfrac{1}{2}\sec^2 y = -\dfrac{1}{2}x^2 + c \quad \Rightarrow \quad \sec^2 y = -x^2 + 2c$

$d)\ tan^2 y\,dy = sin^3 x\,dx$

$\int tan^2 y\,dy = \int (\,sin^2 x\,)(\,sin\,x\,)\,dx$

$\int (\,sec^2 y - 1\,)\,dy = \int (sin\,x - cos^2 x\ sin\,x)\,dx \quad \Rightarrow \quad tan\,y - y = -\,cos\,x + \frac{1}{3}cos^3 x + c$

e) $\dfrac{dy}{dx} = cos^2 x \, cos^2 y$

$$\int \tan^2 y \, dy = \int (1 - cos^2 x)(\sin x) \, dx$$

$$dy = cos^2 x \, cos^2 y \; dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{cos^2 y} dy = \int cos^2 x \, dx$$

$$\int sec^2 y \, dy = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx \quad \Rightarrow \quad \tan y = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

أختبـــــر نفسك في الأسئلة الوزاريـــــة

[2014/2011]	حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2 + e^y}$	Ans: $\left[y^3 + e^y = \sin x + c \right]$
[2011]	حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2}$	$[Ans: y^3 = \sin x + c]$
[2011]	حل المعادلة التفاضلية $e^x dx - y^3 dy = 0$	$\left[Ans: \frac{1}{4} y^4 = e^x + c\right]$
[2012]	حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$ حيث أن $(x = 2), (y = 2)$	$\left[Ans: \ln\lvert y-1\rvert = \frac{1}{2}x^2 + x - 4\right]$
[2014/2013]	حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} + xy = 3x$ حيث أن $(x = 1), (y = 2)$	$\left[Ans: \ln\lvert 3-y\rvert = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2\right]$
[2014]	جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $tan^2 y \, dy = sin^3 x \, dx$	Ans : $\left[\tan y - y = -cox\, x + \frac{1}{3} cox^3 x + c\right]$
[2014]	حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{cos^2 y}{x}; x = 1, \; y = \frac{\pi}{4}$	$[Ans: \tan y = \ln\lvert x\rvert + c]$
[2015]	جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(x+1)y' = 2y$	
[2015]	حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{6y^2 + e^y}$	
[2017 ط1]	جد حل المعادلة التفاضلية $y' - x\sqrt{y} = 0$ عندما $x = 2 \; , \; y = 9$	
[2017 ح2]	حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$ عندما $x = 0 \; , \; y = 0$	
[2017 ط2]	حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{sin^3 x}{tan^2 y}$	
[2017 ط3]	حل المعادلة التفاضلية $tan^2 y \, dy = sin^3 x \, dx$	
[2018 ط1]	حل المعادلة التفاضلية $e^{x-2y} + y' = 0$	
[2018 ح2]	حل المعادلة التفاضلية $xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2$ حيث أن $(x = 2), (y = 2)$	
[2018 ط2]	حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{\cos x}{3y^2 + e^y}$	
[2018 ط2]	جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $xy' = \cos^2 y$ عندما $x = 1 \; , \; y = \frac{\pi}{4}$	